

## TD-ENSEMBLES ET APPLICATIONS

### Exercices d'application et de réflexions

**Exercice1** : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :  $D_{180} = \{n \in \mathbb{N} / n/180\}$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{2} \leq n^2 \leq \frac{3}{2} \right\} ;$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$$

2) Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

**Exercice2** : 1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$$

$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 7 \leq k^2 \leq 35\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$$

$$E_5 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$$

$$E_6 = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 < 2xy \leq 7\}$$

$$E_7 = \left\{ x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1} \right\}$$

$$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}) x^2 \leq 4 + n^3\}$$

$$E_9 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / 0 < 2x \leq y \leq 5\}$$

$$E_{10} = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{p}{q} \text{ et } p; q \in \mathbb{N}^* \text{ Vérifiant } p \leq 3q \leq 11 \right\}$$

2) Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans  $\mathbb{N}$

**Exercice3** : Ecrire en extension les ensembles

$$\text{ suivants : } A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Exercice4** :  $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$  et  $B = \{-2, -1, 0, 1\}$

Montrons que :  $A = B$

**Exercice5** : Soit  $E = \{0; 1; 2\}$  déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exercice6** : Ecrire en extension les ensembles suivants : 1)  $P(P(\emptyset))$  2)  $P(P(\{a; b\}))$

**Exercice7** : donner Complémentaire des ensembles suivants :  $[a; b[$  l'ensemble  $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle  $[a; b[$   $a < b$

**Exercice8** : Soient les ensembles :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2 \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 \frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Montrer que :  $A \cap B = \emptyset$

**Exercice9** : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} (\overline{B-C}) \cup A = E \\ (\overline{C-D}) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$$

**Exercice10** : Soient A ; B ; C des ensembles

Montrer que :  $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

**Exercice11** : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Montrer que :

$$1) A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$3) A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

**Exercice12** : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

**Exercice13** : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble Qu'on note :  $A \Delta B$  tel que :  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

1) Montrer que :  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

2) Montrer que :  $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$

3) Montrer que :  $\forall C \in P(E) : A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

**Exercice14 :** Soit l'ensemble :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$$

1) a) vérifier que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble  $E \cap \mathbb{Z}^2$

$$c) \text{ montrer que : } E = \left\{ \left( \frac{2t^2 - 5}{3t}; \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; \dots\} \text{ et } B = \left\{ -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$$

$$C = \{ \dots; -5; -2; 1; 4; 7; \dots \}$$

**Exercice15 :** soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $A$  et  $B$  deux parties respectives de  $E$  et  $F$

1) déterminer le complémentaire de  $A \times F$  dans  $E \times F$

2) déterminer le complémentaire de  $E \times F$  dans  $E \times F$

3) déterminer le complémentaire de  $A \times B$  dans  $E \times F$

**Exercice17 :** soient l'ensemble :

$$L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Monter qu'il n'existe pas deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que :  $L = A \times B$

**Exercice18 :** Soient les ensembles :

$$H = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

1- montrer que :  $H = ]0, 1]$ .

a- Considérer un élément  $y_0 \in H$

et montrer que  $y_0 \in ]0, 1]$

b- Considérer un élément  $y_0 \in ]0, 1]$

et montrer que  $y_0 \in H$

2- Monter que  $G \subset H$

3- Est-ce que  $G = H$  ?

**Exercice19 :** soit  $a$  un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / |x + 1| \leq 3\} \text{ et } F = \{x \in \mathbb{Z} / |2x - a| \leq 4\}$$

1) Ecrire  $E$  en extension

2) déterminer les valeurs possibles de  $a$  pour lesquelles  $E \cap F = \emptyset$

3) déterminer les valeurs possibles de  $a$  pour lesquelles  $\mathbb{N} \cap F = \emptyset$

4) déterminer les valeurs possibles de  $a$  pour lesquelles  $F \subset \mathbb{N}$

**Exercice20 :** on considère dans  $\mathbb{Z}$  les deux parties suivantes :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x + 10}{x - 5} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$1) a) \text{ montrer que } (\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$$

$$1) b) \text{ montrer que } (\forall x \in \mathbb{Z}) \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$$

2) déterminer :  $A$  ;  $B$  ;  $A - B$  ;  $B - A$  et  $A \Delta B$  en extension

3) on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de  $\mathbb{Z}$  :  $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans  $P(\mathbb{Z})$  l'équation :  $A \Delta X = B$

**Exercice21 :** Soient les ensembles :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$$

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1) montrer que :  $F \subset E$

2) déterminer  $y$  de  $\mathbb{R}$  tel que :  $(1; y) \in E$  ; est ce que on a  $E \subset F$  ?

3) montrer que :  $E = F \cup G$  ou  $G$  est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

a) montrer que :  $H = A \cup B$

b) déterminer :  $H \cap F$

**Exercice22 :** Soient  $A$  ;  $B$  ;  $C$  des parties d'un ensemble  $E$

1) a) déterminer une condition suffisante de l'existence de  $X$  dans  $P(E)$  tel que :  $A \cup X = B$

b) résoudre dans  $P(E)$  l'équation :  $A \cup X = B$

2) on suppose que  $C \subset A \subset B$

résoudre dans  $P(E)$  le système :  $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

**Exercice23 :** soit les 2 applications :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto (-1)^n \quad \text{et} \quad n \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Est-ce que  $f = g$  ?

**Exercice24 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $x \mapsto x + \sqrt{x}$

$f$  est-elle injective ?

**Exercice25:** soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 - 1$

g est-elle injective ?

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice26 :1)**  $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

Montrer que f est injective

2)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 + 4$  g est-elle injective ?

$$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$$

2)  $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que  $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

**Exercice27 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]-\infty; 3]$   
 $x \mapsto 3 - x^2$

f est-elle surjective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $]-\infty; 3]$ .

**Exercice28 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3 - x^2$

f est-elle surjective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice29 :1)**  $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

a- f est-elle surjective de  $\mathbb{R} - \{2\}$  vers  $\mathbb{R}$ .

b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

a- Montrer que la fonction g est surjective.

b- g est-elle injective ?

$$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$$

3)  $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

h est-elle surjective ?

**Exercice30 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2 - 5x$

f est-elle une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice31 :**  $f : [1; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

1- Montrer que f est une bijection de  $[1, +\infty[$  vers  $[2, +\infty[$ .

2- Soit y un élément de  $[2, +\infty[$ , déterminer (en fonction de y) l'élément x dans  $[1, +\infty[$  tel que  $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de  $[2, +\infty[$ , à l'élément unique x de  $[1, +\infty[$  et solution de l'équation  $f(x) = y$  s'appelle : la bijection réciproque de la bijection f et se note :  $f^{-1}$

$$f : [1; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[$$

**Exercice32 :** soit l'application :  $x \mapsto \frac{2}{x-1}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice33 :** Déterminer la fonction réciproque de la fonction  $f : [1; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

**Exercice34 :** Soit la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice35 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que  $\forall x \in [-1; 1] \quad f(x) \in \left[ \frac{-3}{16}; 3 \right]$

2- Montrer que :  $\forall y \in \left[ \frac{-3}{16}; 3 \right] \exists x \in [-1; 1] / (f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle  $[-1; 1]$  par

l'application f est l'intervalle  $\left[ \frac{-3}{16}; 3 \right]$  et on écrit :

$$f([-1; 1]) = \left[ \frac{-3}{16}; 3 \right]$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice36 :** Soit  $(x; y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$

1- Déterminer les couples (x, y) qui vérifient  $h((x, y)) = 1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points M (x, y) qui vérifient  $h((x, y)) = 1$ .

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice37 :** soit l'application :  $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$

1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

2) Déterminer :  $f(K)$  avec  $K = ]-\infty; -1[$

**Exercice38 :** soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

Déterminer :  $f^{-1}(B)$  avec  $B = [-1; 4]$

**Exercice39** : soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \cos x$

Déterminer :  $f^{-1}(D)$  avec  $D = ]1; 2]$

**Exercice40** : Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{1+x^2} \quad \text{déterminer } f^{-1}([1, 2]) \quad f^{-1}([1; 2])$$

**Exercice41** : Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3|1-x^2| + x \quad \text{Ecrire l'expression de } f \text{ sur } [-1, 1]$$

**Exercice42** : Soit l'application

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x+1}{x-1} \quad 1- g \text{ est-elle bijective ?}$$

2- A partir de  $g$ , définir une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

**Exercice43** : soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Déterminer la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; 1]$

**Exercice44** : soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x - |x| + 3$

Déterminer la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$

**Exercice45** : soit les applications :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x \quad x \mapsto 2|x| - x$$

Est-ce que  $g$  est un prolongement de  $f$  ?

**Exercice46** : 1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x)).$$

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$$E(x+y) \neq E(x) + E(y)$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

3) Soit l'application  $x \mapsto E(3x+1) + x$

1- Vérifier que  $h$  n'est pas injective.

2- Donner la restriction de  $h$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ .

3- Déterminer :  $h^{-1}\{4\}$  et  $h^{-1}\{2\}$ ;  $h$  est-elle surjective ?

**Exercice47** : Soient les deux applications :

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer  $f(g(3))$ ;  $f(g(-1))$ ;  $g(f(3))$

2- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $g(f(x))$  existe.

3- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $f(g(x))$  existe.

4- Déterminer les applications  $fog$  et  $gof$ .

$$h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

**Exercice48** : soit l'application :

$$x \mapsto x + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

1) Ecrire l'application  $h$  comme la composée de deux applications  $f$  et  $g$  :  $h = g \circ f$

2)a) Montrer que  $f$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que  $h$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$  et déterminer sa bijection réciproque

**Exercice49** : soient les applications :

$$f : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[ \quad g : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$$

$$x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x-1}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$$

1) Déterminer :  $f([2; 4[)$  et  $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  et déterminer sa bijection réciproque

3)a) vérifier que :  $\forall x \in ]1; +\infty[ : g(x) = (f(x))^2$

3)b) en déduire que :  $g$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  et déterminer sa bijection réciproque

**Exercice50** : Soient les ensembles :

$$E = \left\{ x \in ]-\pi; 2\pi[ / \tan x = \sqrt{3} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F = \left\{ x \in ]-\pi; 2\pi[ / x = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$G = \left\{ x \in ]-\pi; 2\pi[ / x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Vérifier que :  $S \subseteq E$  et  $E \subseteq S$  et que  $E = S$  et  $E = G$

Vérifier que :  $\frac{\pi}{8}$  n'est pas un élément de  $E$  et que

$E \neq F$

**Exercice51** : Soient  $A = \left\{ \frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N} \right\}$  et

$$B = \left\{ \frac{2n+4}{2n-1} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

1- Est ce que :  $\frac{17}{3} \in A$  ?  $\frac{43}{25} \in B$  ?  $\frac{42}{37} \in B$  ?

2- montrer que  $\frac{6}{5}$  est un élément commun entre  $A$  et  $B$ .

**Exercice52** : Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

1-Montrer que chaque élément de  $\mathbb{R}$  à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

$$(P) \ (a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b)).$$

3-Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \ f(x) \in \left[ \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]$

4- Montrer que  $(\forall y \in \left[ \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]) (\exists x \in \mathbb{R}) (f(x) = y)$

**Exercice53** Soient les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto (-1)^n \times n \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} n. \text{si}. n. \text{pair} \\ -n. \text{si}. n. \text{impair} \end{cases}$$

Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (f(n) = g(n))$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

