

Exercice 1

On pose $E = \left\{ \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

et $F = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k'\pi}{2} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$

1) Est-ce que $\frac{2\pi}{3} \in E$? $\frac{2\pi}{3} \in F$

2) montrer que $E \cap F = \emptyset$

Exercice 2

On considère les ensembles

$$A = \{3p + 2 / p \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{et } B = \{2q + 3 / q \in \mathbb{Z}\}$$

1) montrer que $11 \in A \cap B$

2) déterminer en compréhension $A \cap B$

Exercice 3

Déterminer en extension les ensembles
Suivants

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1 < \frac{x-2}{2x+1} \leq 3 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in]-\pi, \pi[/ 4 \cos^2(2x) = 1 \right\}$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{n+5}{3} \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D = \left\{ p \in \mathbb{N} / \frac{p^2 + 3p + 7}{p+2} \in \mathbb{N} \right\}$$

Exercice 4

On pose $E = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

et $F = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k'\pi}{3} / k' \in \mathbb{Z} \right\}$

1) Vérifier que $\frac{\pi}{12} \in E$

2) Est-ce que $\frac{\pi}{4} \in F$?

3) a) montrer que $F \subset E$
b) est-ce que $F = E$?

Exercice 5

On considère les ensembles

$$A = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad B = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi / k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2K\pi / K \in \mathbb{Z} \right\}$$

1) montrer que $A \cap B = \emptyset$

2) montrer que $B \subset C$

3) montrer que $A \cup B = C$

Exercice 6

Soient α et β deux réels de $\mathbb{R}^{*+}$

On pose $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| < \alpha\}$

et $E_\beta = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| < \beta\}$

1) montrer que $E_\alpha \neq \emptyset$ et $E_\beta \neq \emptyset$

2) on suppose que $\alpha < \beta$

a) montrer que $E_\alpha \subset E_\beta$

b) Déterminer $E_\beta - E_\alpha$

Exercice 7

Soit l'ensemble

$$E = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 / 3 \mid mn + m + n\}$$

1) montrer que $(7, 4) \in E$ et $(8, 5) \notin E$

2) on pose $A = \{(3k+1, 3k'+1) / (k, k') \in \mathbb{N}^2\}$

montrer que $A \subset E$

3) on pose $B = \{(3k, 3k+2) / k \in \mathbb{N}\}$

Montrer que $B \cap E = \emptyset$

Exercice 8

Soient a et b deux réels tels que $a < b$

On pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$

On considère les ensembles

$$I = \{(1-k)a + kb / k \in]0, 1[\}$$

$$\text{et } J = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r\}$$

1) montrer que $x_0 \in I$ et $J \neq \emptyset$

2) a) montrer que $I \subset]a, b[$

b) montrer que $I =]a, b[$

3) montrer que $I = J$