TD : **ENSEMBLES ET APPLICATIONS** PROF : ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF
Avec solutions

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Exercice1 :1)Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180}=\{n\in\mathbb{N}/n/180\}$

$A=\left\{n\in\mathbb{Z}/\frac{-5}{2}\le n^2\le\frac{3}{2}\right\}$;

$B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Solution : 1) $180=2^2\times3^2\times5$

$D_{180}=\{1;2;3;4;5;6;9;10;12;15;18;20;30;36;45;60;90;180\}$

$A=\{-1;0;1\}$

$x^2+x+1=0 \quad \Delta=-3\prec 0$ donc : $B=\varnothing$

2) $P=\{2k/k\in\mathbb{N}\}$

Exercice2 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{k\in\mathbb{Z}/|k+1|\le 2\}$

$E_2=\{x\in\mathbb{Z}/k^2\le 7\}$

$E_3=\{k\in\mathbb{Z}/7\le k^2\le 35\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$

$E_5=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$

$E_6=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\le 7\}$

$E_7=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\ge\frac{n}{n+1}\right\}$

$E_8=\{x\in\mathbb{Z}/(\forall n\in\mathbb{N})x^2\le 4+n^3\}$

$E_9=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/0\prec 2x\le y\le 5\}$

$E_{10}=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{p}{q} et p;q\in\mathbb{N}^* \text{ Vérifiant } p\le 3q\le 11\right\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Solution : 1) $k\in E_1\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|k+1|\le 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\le k+1\le 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-3\le k\le 1\Leftrightarrow$

Donc : $E_1=\{-3;-2;-1;0;1\}$

$k\in E_2\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et

$k^2\le 7\Leftrightarrow |k|\le\sqrt{7}\Leftrightarrow -\sqrt{7}\le k\le\sqrt{7}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $E_2=\{-2;-1;0;1;2\}$

$k\in E_3\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $7\le k^2\le 35$

$\Leftrightarrow\sqrt{7}\le|k|\le\sqrt{35}\Leftrightarrow|k|\in\{3;4;5\}\Leftrightarrow k\in\{-5;-4;-3;3;4;5\}$

Donc : $E_3=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$?

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité et

$x+y\ge x-y \quad 32=2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$E_4=\{(6;2);(9;7)\}$

$E_5=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$?

$x^2-y^2=15\Leftrightarrow(x+y)(x-y)=15$

De même que : E_4 on a : les diviseurs de 15 sont 1 ;3 ;5 ;15 et $x+y\ge x-y$

On dresse un tableau :

$x-y$	1	3
$x+y$	15	5
x	8	4
y	7	1

$E_5=\{(8;7);(4;1)\}$

$E_6=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/0\prec 2xy\le 7\}$?

Soit : $(x;y)\in E_6$ donc : $0\prec 2xy\le 7$ donc : $2xy$ est u nombre relatif pair inferieur a 7

Donc : $(x;y)\in E_6\Leftrightarrow 2xy=2$ ou $2xy=4$ ou $2xy=6$

$(x;y)\in E_6\Leftrightarrow xy=1$ ou $xy=2$ ou $xy=3$ Donc :

$E_6=\{(-1;-1);(1;1);(1;2);(-1;-2);(2;1);(-2;-1);(1;3);(-1;-3);(3;1);(-3;-1)\}$

$E_7=\left\{x\in\mathbb{Z}^*/(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\ge\frac{n}{n+1}\right\}$?

Soit : $(x;y)\in E_6$ donc : $x\in\mathbb{Z}^*$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\frac{1}{x}\ge\frac{n}{n+1}$

Alors $x\in\mathbb{N}^*$ et

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\frac{1}{x}\geq\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow x\leq\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\prec 2\Leftrightarrow x\prec 2$$

$$E_7=\{1\}$$

$E_8=\left\{x\in\mathbb{Z}/(\forall n\in\mathbb{N})\,x^2\leq 4+n^3\right\}$?

Soit : $x\in E_8$ donc : $x\in\mathbb{Z}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\,x^2\leq 4+n^3$

donc : on particulier pour $n=0$ on a $x^2\leq 4$ donc

$|x|\leq 2$ d'où $x\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Inversement on vérifie que les éléments $-2;-1;0;1;2$

Appartiennent à E_8

Conclusion : $E_8=\{-2;-1;0;1;2\}$

$E_{10}=\left\{x\in\mathbb{Q}/x=\frac{p}{q}etp;q\in\mathbb{N}^*\text{ Vérifiant } p\leq 3q\leq 11\right\}$?

Soit : $x\in E_{10}$ donc $x=\frac{p}{q}$ avec $p;q\in\mathbb{N}^*$ et

$p\leq 3q\leq 11$ donc

$$\begin{cases}3q\leq 11\\ p\leq 3q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q\leq 11/3\\ p\leq 3q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q\in\{1;2;3\}\\ p\leq 3q\end{cases}\text{ donc}$$

$(p;q)\in\{(1;1);(2;1);(3;1);(1;2);(2;2);(3;2)$

$(5;2);(6;2);(1;3);(2;3);\ldots;(9;3)\}$ Donc :

$$E_{10}=\left\{1;2;3;\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right\}$$

2) $P=\{5k/k\in\mathbb{N}\}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $A=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

$$B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Solution : on sait que la fonction cos est périodique de période 2π et $\frac{n\pi}{6}=2\pi\Leftrightarrow n=12$

$$n\in\{0;1;2;3;..;11\}$$

$$A=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{n\pi}{6}\right)/n\in[0;11]\right\}$$

En tenant compte des relations :

$\cos(\pi+x)=\cos(\pi-x)=-\cos x$ on en deduit :

$$A=\left\{\cos\left(\frac{6\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{11\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{16\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{21\pi}{30}\right)\right.$$

$$\left.;\cos\left(\frac{26\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{31\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{36\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{41\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{46\pi}{30}\right)\right.$$

$$\left.;\cos\left(\frac{51\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{56\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{61\pi}{30}\right)\right\}$$

De même pour sin on a : $B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in[0;11]\right\}$

En tenant compte des relations :

$$\sin(\pi-x)=\sin x=-\sin(\pi+x)=-\sin(-x)$$

on en deduit :

$$B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right\}$$

Exercice4 : $A=\left\{k\in\mathbb{Z}/|2k+1|\leq 3\right\}$ et B = {−2,−1,0,1}

Montrons que : $A = B$

Solution : $k\in A\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|2k+1|\leq 3\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-3\leq 2k+1\leq 3\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-4\leq 2k\leq 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\leq k\leq 1\Leftrightarrow k\in\{-2;-1;0;1\}\Leftrightarrow k\in B$

Donc on a : $k\in A\Leftrightarrow k\in B$

Donc : $A = B$

Exercice5 : Soit $E=\{0;1;2\}$ } déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

Solution :

$$P(E)=\{\varnothing;\{0\};\{1\};\{2\};\{0;1\};\{0;2\};\{1;2\};E\}$$

Exercice6 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Solution : 1) Il est aisé de voire que $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$

donc : $P(P(\varnothing))=\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$

2) $P(P(\{a;b\}))$:

$P(\{a;b\})=\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{a;b\}\}$ Donc :

$P(P(\{a;b\}))=\{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{a\}\};\{\{b\}\};\{\{a;b\}\};\{\varnothing;\{a\}\};\{\varnothing;\{b\}\};\{\varnothing;\{a;b\}\};\{\{a\};\{b\}\};$

$;\{\{a\};\{a;b\}\};\{\{b\};\{a;b\}\};\{\{a;b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{a;b\}\};\{\varnothing;\{b\};\{a;b\}\}\}$

Exercice7 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a;b[$ l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[$ $a\prec b$

Solution : 1) le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels et se note $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

2) $\overline{[a;b[} = \{x \in \mathbb{R} / x \notin [a;b[\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b \text{ ou } x \prec a\}$

$\overline{[a;b[} =]-\infty;a[\cup [b;+\infty[$

Exercice8 :Soient les ensembles :

$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\quad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Monter que : $A \cap B = \varnothing$

Solution : On suppose que : $A \cap B \neq \varnothing$

Donc : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $\; x_0 \in A$ et $x_0 \in B$

$\Leftrightarrow \exists (k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2 :\; x_0 = \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc $\Leftrightarrow \exists (k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2 :\; \frac{\pi}{2} + 2\frac{k_1\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc : $\frac{2}{5}(k_1 - k_2) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k_1 - k_2 = -\frac{5}{8}$ contradiction

avec le faite que $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8} \notin \mathbb{Z}$ Donc : $A \cap B = \varnothing$

Exercice9 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases} \left(\overline{B-C}\right) \cup A = E \\ \left(\overline{C-D}\right) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$

Solution : On suppose que :

$\left(\overline{B-C}\right) \cup A = E$ et $\left(\overline{C-D}\right) \cup A = E$

Remarquer que : $A \cup B = E \Rightarrow \overline{A} \subset B$

Donc : $B - C \subset A$ et $C - D \subset A$ cad

$B \cap \overline{C} \subset A$ et $C \cap \overline{D} \subset A$

Montrons que : $B - D \subset A$ cad $B \cap \overline{D} \subset A$?

Soit $x \in B \cap \overline{D}$

$x \in B \cap \overline{D} \Leftrightarrow x \in B$ et $x \in \overline{D}$

- Si $x \in C$ alors $x \in C \cap \overline{D}$ donc $x \in A$ car $C \cap \overline{D} \subset A$
- Si $x \notin C$ alors $x \in B \cap \overline{C}$ donc $x \in A$ car $B \cap \overline{C} \subset A$

Dans tous les cas : $(B - D) \subset A$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Solution : On suppose que : $A \subset B \subset C$

On a : $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset B$ et $B \subset C$

$\Rightarrow A \cup B = B$ et $B \cap C = B \Rightarrow A \cup B = B \cap C$

On suppose que : $A \cup B = B \cap C$

On a : $A \cup B = B \cap C \Rightarrow A \cup B \subset B$ et $A \cup B \subset C$

$\Rightarrow A \subset B$ et $B \subset C$

$\Rightarrow A \subset B \subset C$

Donc : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que :

1) $A = (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Solution :1)

$(A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$

$= \left[(A \cap B) \cap \left(C \cup \overline{C}\right)\right] \cup \left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(C \cup \overline{C}\right)\right]$

$= \left[(A \cap B) \cap E\right] \cup \left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cap E\right] = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$

$= A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = A \cap E = A$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = \left[B \cup (A \cap C)\right] \cap (C \cup A)$

$= \left(B \cap (C \cup A)\right) \cup \left((A \cap C) \cap (C \cup A)\right)$

$= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C)$

3) Montrons que :

$\begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap B = A \cap C \\ A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \end{cases}$

$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap \overline{C}} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow \overline{A} \cup B = \overline{A} \cup C \Rightarrow A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = A \cap \left(\overline{A} \cup C\right)$

$\Rightarrow \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$

Inversement :

$A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

D'après l'implication directe

Donc : $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice12 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$

Solution : On suppose que :

$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases}$ Montrons que :

$(\forall x \in E)(x \in B \Rightarrow x \in C)$?

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in A$ ou $x \in C$

- Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ car $A \cap B \subset A \cap C$ donc $B \subset C$
- Si $x \notin A$ et puisque $x \in C$ ou $x \in A$ est vraie alors $B \subset C$

Conclusion : $(\forall x \in E)(x \in B \Rightarrow x \in C)$

Donc $B \subset C$

Exercice13 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

2)Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

3)Monter que : $\forall C\in P(E)$: $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

Solution : 1)

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)$

$=\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup B\right]\cap\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\overline{A}\right]$

$=(A\cup B)\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)$

$=(A\cup B)\cap E\cap E\cap\left(\overline{A\cap B}\right)$

$=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cup B)-(A\cap B)$

2)Monter que :

$\overline{A}\Delta\overline{B}=\left(\overline{A}-\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}-\overline{A}\right)=\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)$

$=(A-B)\cup(B-A)=A\Delta B$

3)soit $C\in P(E)$

- Si on a : $B=C$ alors $A\Delta B=A\Delta C$
- Supposons que : $A\Delta B=A\Delta C$ et montrons que $B=C$?

✓ Soit $x\in B$ montrons que $x\in C$?

Si $x\in A$:

($x\in A$ et $x\in B$)$\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\notin A\Delta B\Rightarrow x\notin A\Delta C$

(Car $A\Delta B=A\Delta C$)

$\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in C$

Donc $A\cap B\subset C$ **(1)**

Si $x\notin A$:

($x\notin A$ et $x\in B$)$\Rightarrow x\in B-A\Rightarrow x\in A\Delta B\Rightarrow x\in A\Delta C$

(Car $A\Delta B=A\Delta C$)

$\Rightarrow x\in C-A\Rightarrow x\in C$

Donc $\overline{A}\cap B\subset C$ **(2)**

De **(1) et (2)** en deduit que : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\subset C$

Et puisque : $(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B=E\cap B=B$

Alors $B\subset C$

De même on montre que : $C\subset B$

Donc : $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$

Finalement : $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

Exercice14 :Soit l'ensemble :

$E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy-2y^2+5=0\right\}$

1) a)vérifier que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E=\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Solution : 1) a)

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : (x-y)(x+2y)=x^2+2xy-xy-2y^2$

$=x^2+xy-2y^2$

b) $(x;y)\in E\cap\mathbb{Z}^2\Leftrightarrow(x;y)\in E$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)=-5$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\mathbb{Z}^2\begin{cases}x-y=-5\\x+2y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=5\\x+2y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=-1\\x+2y=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=1\\x+2y=-5\end{cases}$

Donc : $E\cap\mathbb{Z}^2=\{(-3;2);(3;-2);(1;2);(-1;-2)\}$

c) $(x;y)\in E\Leftrightarrow(x-y)(x+2y)=-5\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=t\\x+2y=\dfrac{-5}{t}\end{cases} : t\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow\left(x=\dfrac{2t^2-5}{3t}ety=\dfrac{-t^2-5}{3t}\right) : t\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

Donc : $E=\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

4) $A=\{k^2;k\in\mathbb{N}\}$ et $B=\left\{\dfrac{(-1)^k}{k};k\in\mathbb{N}^*\right\}$

$C=\{1+3n;n\in\mathbb{Z}\}$

Exercice15 :soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1)déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2)déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3)déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

Solution : 1) le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$ se note : $C_{E\times F}^{A\times B}$ ou $\overline{A\times B}$

$(x;y)\in\overline{A\times F}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times F\Leftrightarrow x\notin Aouy\notin F$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A}ouy\in\overline{F}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ ou $y\notin F$

$\Leftrightarrow (x;y)\in \overline{A}\times F$ Car : $y\notin F$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{A\times F}=\overline{A}\times F$

$(x;y)\in \overline{E\times B}\Leftrightarrow (x;y)\notin E\times B\Leftrightarrow x\notin E ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in \overline{E} ou y\in \overline{B}\Leftrightarrow (x;y)\in E\times \overline{B}$ ou $x\notin E$

$\Leftrightarrow (x;y)\in E\times \overline{B}$ Car : $x\notin E$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{E\times B}=E\times \overline{B}$

3) $(x;y)\in \overline{A\times B}\Leftrightarrow (x;y)\notin A\times B\Leftrightarrow x\notin A ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in \overline{A} ou y\in \overline{B}\Leftrightarrow (x;y)\in \overline{A}\times F$ ou $(x;y)\in E\times \overline{B}$

$\Leftrightarrow (x;y)\in \left(\overline{A}\times F\right)\cup\left(E\times \overline{B}\right)$

Donc : $\overline{A\times B}=\left(\overline{A}\times F\right)\cup\left(E\times \overline{B}\right)$

Exercice17 : soient l'ensemble :

$L=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\right\}$

Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Solution : On suppose: qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

On a : $(1;0)\in L$ et $(0;1)\in L$

Donc : $1\in A$ et $1\in B$ car $L=A\times B$

Donc : $(1;1)\in A\times B$ cad $(1;1)\in L$

Donc contradiction car : $1^2+1^2\succ 1$

Conclusion il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Exercice18 : Soient les ensembles :

$$H=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$G=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$$

1- montrer que : H =]0,1].

a- Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que y_0 ∈]0,1]

b- Considérer un élément y_0 ∈]0,1] et montrer que $y_0\in H$

2- Monter que $G\subset H$

3- Est-ce que $G = H$?

Solution :

1- a- soit un élément $y_0\in H$ montrons que y_0 ∈]0,1] ?

$$y_0\in H\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$$

On a $x_0^{\,2}\ge 0\Rightarrow x_0^{\,2}+1\ge 1$

$\Rightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1}\ge 1\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}\le 1\Rightarrow y_0$ ∈]0,1] Donc :

$H\subset \left]0;1\right]$ **(1)**

b- Considérer un élément y_0 ∈]0,1]

et montrons que $y_0\in H$?

$y_0\in\left]0;1\right] \quad \exists ? x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2}+1}}\Leftrightarrow y_0^{\,2}=\frac{1}{x_0^{\,2}+1}\Leftrightarrow x_0^{\,2}=\frac{1}{y_0^{\,2}}-1$$

Or : $y_0\in\left]0;1\right]$ donc $0\prec y_0\le 1$ donc $\frac{1}{y_0^{\,2}}-1\ge 0$

Donc : il suffit de prendre : $x_0=\sqrt{\frac{1}{y_0^{\,2}}-1}$ Donc : $y_0\in H$

Donc : $\left]0;1\right]\subset H$ **(2)**

De : **(1) et (2)** en deduit que **:** $H=\left]0;1\right]$

2- montrons que $G\subset H$??

Montrons que : $G\subset\left]0;1\right]$?

soit un élément $y_0\in G$ montrons que y_0 ∈]0,1] ?

$$y_0\in G\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / y_0=\frac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$$

On a $x_0^{\,2}\ge 0\Rightarrow x_0^{\,2}+1\ge 1$

$$\Rightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1}\ge 1\Rightarrow \sqrt{x_0^{\,2}+1}+1\ge 2\Rightarrow 0\prec\frac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}}\le\frac{1}{2}\le 1$$

Donc : y_0 ∈]0,1] Donc : $G\subset H$

3)supposons : $G = H$

On a $1\in H\Rightarrow 1\in G$

$$\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / 1=\frac{1}{1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}}$$

$$\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / 1+\sqrt{x_0^{\,2}+1}=1\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / \sqrt{x_0^{\,2}+1}=0$$

$\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R} / x_0^{\,2}=-1$ absurde donc : $H\ne G$

Exercice19 : soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$E=\left\{x\in\mathbb{Z} / \left|x+1\right|\le 3\right\}$ et $F=\left\{x\in\mathbb{Z} / \left|2x-a\right|\le 4\right\}$

1) Ecrire E en extension

2) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E\cap F=\varnothing$

3) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap F=\varnothing$

4) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F \subset \mathbb{N}$

Solution : 1) il est aisé de voir que :

$E = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$

2)

$F = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \le 2x - a \le 4\} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \le a \le 2x + 4\}$

Donc : $C_{\mathbb{Z}}^{F} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4\}$

$E \cap F = \varnothing \Leftrightarrow E \subset C_{\mathbb{Z}}^{F} \Leftrightarrow \forall x \in E; x \in C_{\mathbb{Z}}^{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in E; a \in \left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[$

$\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in E} \left(\left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[\right)$

Puisque : $E = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$ on obtient :

$E \cap F = \varnothing \Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty; 2(-4)-4\right[\cup \left]2\times 2+4; +\infty\right[\right)$

$\Leftrightarrow a \in \left(\left]-\infty; -12\right[\cup \left]8; +\infty\right[\right)$

3)on a : $\overline{F} = \{x \in \mathbb{Z} / 2x - 4 \succ a.ou.a \succ 2x + 4\}$ donc

Nous pouvons écrire :

$\mathbb{N} \cap F = \varnothing \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset \overline{F} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; x \in \overline{F}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}; a \in \left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[$

$\Leftrightarrow a \in \bigcap_{x \in \mathbb{N}} \left(\left]-\infty; 2x-4\right[\cup \left]2x+4; +\infty\right[\right) \Leftrightarrow a \in \left]-\infty; -4\right[$

3)on a : $F = \left\{x \in \mathbb{Z} / -2 + \frac{a}{2} \le x \le 2 + \frac{a}{2}\right\}$ donc

$F \subset \mathbb{N} \Leftrightarrow F = \left(\forall x \in \left\{x \in \mathbb{Z} / -2 + \frac{a}{2} \le x \le 2 + \frac{a}{2}\right\}\right); x \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow -1 \prec -2 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow -2 \prec -4 + a \Leftrightarrow 2 \prec a$

Exercice20 : on considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{x+10}{x-5} \in \mathbb{Z}\right\}$

1)a) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}\right) \frac{x+10}{x-5} = 1 + \frac{15}{x-5}$

1)b) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{Z}\right) \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x-1}$

2) déterminer : A ; B; $A-B; B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X = B$

Solution : 1) a) il est aisé de voir que :

$\left(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}\right) \frac{x+10}{x-5} = 1 + \frac{15}{x-5}$

1) b) il est aisé aussi de voir que

$\left(\forall x \in \mathbb{Z}\right) 2x - 1 + \frac{9}{2x-1} = + \frac{(2x-1)^2 + 9}{2x-1} = \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1}$

2) détermination de : A ?

On a : $A = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$ et

$\left(\forall x \in \mathbb{Z}\right) 2x - 1 \in \mathbb{Z}$ et $\frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x-1}$

En deduit que : $\left(\forall x \in \mathbb{Z}\right)$; $x \in A \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x-1} \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x - 1 + \frac{9}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{9}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x - 1 divise 9$

$\Leftrightarrow 2x - 1 \in \{-9;-3;-1;1;3;9\} \Leftrightarrow 2x \in \{-8;-2;0;2;4;10\}$

$\Leftrightarrow x \in \{-4;-1;0;1;2;5\}$ donc : $A = \{-4;-1;0;1;2;5\}$

détermination de : B ?

soit $x \in \mathbb{Z}$ de façon analogue nous pouvons écrire :

$x \in B \Leftrightarrow x \ne 5 et x - 5 divise 15$

$\Leftrightarrow x - 5 \in \{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$

$\Leftrightarrow x \in \{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$ donc :

$B = \{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

détermination de : $A-B; B-A$ et $A\Delta B$?

$A - B = \{-4;-1;0;1;2;5\} - \{-10;0;2;4;6;8;10;20\} = \{-4;-1;1;5\}$

$A - B = \{-10;0;2;4;6;8;10;20\} - \{-4;-1;0;1;2;5\} = \{-10;4;6;8;10;20\}$

$A\Delta B = (A-B) \cup (A-B) = \{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

3)Résolution dans $P(\mathbb{Z})$ de l'équation : $A\Delta X = B$

On trouve : $X = \{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

Exercice21 :Soient les ensembles :

$E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$

$F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$

1) montrer que : $F \subset E$

2)déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y) \in E$; est ce que on a $E \subset F$?

3) montrer que : $E = F \cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$A = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 + \sqrt{x^2+1} = 0\right\}$

$B = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 - \sqrt{x^2+1} = 0\right\}$

a) montrer que : $H = A \cup B$

b) déterminer : $H \cap F$

Solution : 1) montrons que : $F \subset E$?

On a : $(x;y) \in F \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=y^2+y^2-2y^2=0 \Rightarrow (x;y)\in E$

Donc : $F \subset E$

2) $(1;y)\in E \Leftrightarrow 1-y-2y^2=0 \Leftrightarrow (1+y)(1-2y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ ou $y=\dfrac{1}{2}$

Donc : $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\in E$ ou $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\notin F$

Donc : $\exists (x;y)\in \mathbb{R}^2 / \ (x;y)\notin F$ et $(x;y)\in E$

Donc : $E \not\subset F$

3) $(x;y)\in E \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x^2-2xy+xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0 \Leftrightarrow x+y=0$ ou $x-2y=0$

$\Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Avec : $G=\left\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / x-2y=0\right\}$

Donc : $\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2 \ (x;y)\in E \Leftrightarrow (x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Donc : $E=F\cup G$

4) a) $(x;y)\in H \Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^2+2x=0$

$\Leftrightarrow \left[y-(x+1)\right]^2=(x+1)^2-2x \Leftrightarrow \left[y-(x+1)\right]^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow y=x+1+\sqrt{x^2+1}$ ou $\Leftrightarrow y=x+1-\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow (x;y)\in A$ ou $(x;y)\in B$ Donc : $H=A\cup B$

4) b) $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in H$ ou $(x;y)\in F$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+2x-2y=0$ et $x=-y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x^2+2x+2x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+4)=0 \\ x=-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 ou x=-\dfrac{4}{3} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0 et y=0$ ou $x=-\dfrac{4}{3} et y=\dfrac{4}{3}$

Donc : $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in \left\{(0;0);\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)\right\}$

$H\cap F=\left\{(0;0);\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)\right\}$

Exercice22 :Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a)déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b)résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) on suppose que $C\subset A\subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases}$

Solution : 1)si on a : $A\cup X=B$ alors : $X\subset B$ et $A\subset B$

Donc une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$ est $A\subset B$

b)résolution dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

$A\cup X=B \Rightarrow (A-B)\cap(A\cup X)=(B-A)\cap B$

$\Leftrightarrow \left[(B-A)\cap A\right]\cup\left[(B-A)\cap X\right]=B-A$

$\Leftrightarrow \varnothing\cup\left[(B-A)\cap X\right]=B-A$

$\Leftrightarrow (B-A)\cap X=B-A \Leftrightarrow B-A\subset X \Rightarrow B-A\subset X\subset B$

Inversement :

$\forall X\in P(E)$ tel que : $B-C\subset X\subset B$ est solution de l'équation : $A\cup X=B$

Et on a : $(B-A)\cup A=B \quad (B-A)\cap A=\varnothing$

Donc : $A\cup X=B \Leftrightarrow X=(B-A)\cup Y \quad Y\in P(E)$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\left\{(B-A)\cup Y ; Y\in P(E)\right\}$

2) $C\subset A\subset B$

$\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=(B-A)\cup Y / Y\in P(E) \\ A\cap\left[(B-A)\cup Y\right]=C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X=(B-A)\cup Y / Y\in P(E) \\ \left[A\cap(B-A)\right]\cup\left[A\cap Y\right]=C \end{cases}$

et puisque $A\cap(B-A)=\varnothing$ et $A\cap Y=Y$ car $Y\subset A$

alors : $X=(B-A)\cup C$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\left\{(B-A)\cup C\right\}$

Exercice23 : soit les 2 applications :

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto(-1)^n$ et $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$

Est-ce que $f=g$?

Solution :que deux applications f et g ont le même ensemble de départ $\mathbb{Z}$ et le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et on a :

$g(n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n=f(n)$

Donc : $f=g$

Exercice24 :soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x+\sqrt{x}$

f est-elle injective ?

Solution : soient $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1\right) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$ ou $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 = 0$

Or $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ donc f est injective

Exercice25: soit l'application : $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 1 \end{array}$

g est-elle injective ?

Solution : on a : $g(1) = g(-1) = 0$ mais $1 \neq -1$

Donc g n'est pas injective

Exercice26 :1) $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$

Montrer que f est injective

2) $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 4 \end{array}$ g est-elle injective ?

2) $\begin{array}{l} h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \end{array}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Exercice27 : soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^+ \to]-\infty; 3] \\ x \mapsto 3 - x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty; 3]$.

Solution : soient $y \in]-\infty; 3]$

Resolvons l'équation: $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow 3 - x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = 3 - y$

Or $y \in]-\infty; 3]$ donc $y \leq 3$ donc $0 \leq 3 - y$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - y}$ car $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall \boldsymbol{y} \in]-\infty; 3])(\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$

Donc :f est surjective

Exercice28 : soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 - x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : on remarque que :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a : $f(x) \leq 3$

Donc par exemple l'équation: $f(x) = 4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

Exercice29 :1) $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$

a- f est-elle surjective de $\mathbb{R}/\{2\}$ vers $\mathbb{R}$.

b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to [2; +\infty[\\ x \mapsto x^2 - 2x + 3 \end{array}$

a- Montrer que la fonction g est surjective.

b- g est-elle injective ?

3) $\begin{array}{l} h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[\\ n \mapsto 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \end{array}$

h est-elle surjective ?

Exercice30 : soit l'application : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 - 5x \end{array}$

f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : soient $y \in \mathbb{R}$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow 2 - 5x = y \Leftrightarrow x = \dfrac{2-y}{5}$

Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ $(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R})$

Donc :f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice31 : $\begin{array}{l} f : [1; +\infty[\to [2; +\infty[\\ x \mapsto x^2 - 2x + 3 \end{array}$

1- Montrer que f est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

2- Soit y un élément de $[2,+\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1,+\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2,+\infty[$, à l'élément unique x de $[1,+\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection $\boldsymbol{f}$ et se note : $f-1$

Exercice32 : soit l'application : $\begin{array}{l} f :]1; +\infty[\to]0; +\infty[\\ x \mapsto \dfrac{2}{x-1} \end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Solution soient $y \in]0; +\infty[$

Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-1}=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{2}{y} \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{y}+1$$

$(\forall\, y\in]0;+\infty[\,)\ (\exists\,!\ \boldsymbol{x}\in\ ]1;+\infty[\,)\ (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Donc : f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in]0;+\infty[\end{cases}$$

$\forall y\in]0;+\infty[\quad f^{-1}(y)=\dfrac{2}{y}+1$ Donc : $\begin{aligned} f^{-1}:]0;+\infty[&\to]1;+\infty[\\ x &\mapsto \frac{2}{x}+1 \end{aligned}$

Exercice33 :Déterminer la fonction réciproque de la fonction $\begin{aligned} f: [1;+\infty[&\to [2;+\infty[\\ x &\mapsto x^2-2x+3 \end{aligned}$

Exercice34 :Soit la fonction g définie par :

$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice35 :Soit $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^2-x \end{aligned}$

1- Montrer que $\forall x\in[-1;1]\quad f(x)\in\left[\dfrac{-3}{16};3\right]$

2- Montrer que : $\forall y\in\left[\dfrac{-3}{16};3\right]\ \exists x\in[-1;1]\,/\,(f(x)=y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1;1]$ par l'application f est l'intervalle $\left[\dfrac{-3}{16};3\right]$ et on écrit :

$$f([-1;1])=\left[\frac{-3}{16};3\right]$$

Exercice36 : Soit $\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x;y) &\mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \end{aligned}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient $h((x,y))=1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M\,(x,y)$ qui vérifient $h\,((x,y))=1$.

Exercice37 :soit l'application : $\begin{aligned} f: \mathbb{R}-\{-1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3x-1}{x+1} \end{aligned}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$

2)Déterminer : $f(K)$ avec $K=]-\infty;-1[$

Solution : 1) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$3-\frac{4}{x+1}=\frac{3x+3-4}{x+1}=\frac{3x-1}{x+1}=f(x)$$

2) $x\in K \Leftrightarrow x\prec -1 \Leftrightarrow x+1\prec 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{x+1}\succ 0$

$\Leftrightarrow 3-\dfrac{4}{x+1}\succ 3 \Leftrightarrow g(x)\in]3;+\infty[$ donc $f(K)=]3;+\infty[$

Exercice38 : soit l'application : $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B=[-1;4]$

Solution :

$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\le f(x)\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\le x^2\le 4\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,0\le x^2\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-2\le x\le 2\}=[-2;2]$ donc $f^{-1}(B)=[-2;2]$

Exercice39 :soit l'application : $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$

Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D=]1;2]$

Solution :

$f^{-1}(D)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in D\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,1\prec f(x)\le 2\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,1\prec \cos x\le 2\}=\varnothing$ car

$\forall x\in\mathbb{R}\,/\,-1\le\cos x\le 1$ donc $f^{-1}(D)=\varnothing$

Exercice40 :

Soit $\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3}{1+x^2} \end{aligned}$ déterminer $f-1([1,2])$ $f^{-1}([1;2])$

Exercice41 :Soit l'application :

$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3|1-x^2|+x \end{aligned}$ Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Exercice42 : Soit l'application

$\begin{aligned} g: \mathbb{R}-\{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3x+1}{x-1} \end{aligned}$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g, définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice43 :soit l'application : $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2-2x+1} \end{aligned}$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Solution : $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

Si $x\in]-\infty;1]$ alors : $f(x)=-(x-1)=-x+1$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$ est l'application $g:]-\infty;1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -x+1$

Exercice44 :soit l'application : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x-|x|+3$

Déterminer la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Solution : $f(x)=2x-|x|+3$

Si $x\in]-\infty;0]$ alors : $f(x)=2x+x+3=3x+3$

Donc : la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est l'application $g:]-\infty;0]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3x+3$

Exercice45 : soit les applications : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2|x|-x$

Est-ce que g est un prolongement de f ?

Solution : $g(x)=2|x|-x=x$ Si $x\in\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$

Donc : g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$

Exercice46 : 1) Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall m\in\mathbb{Z})(E(m+x)=m+E(x))$.

2) Vérifier par un contre-exemple que :
$E(x+y)\neq E(x)+E(y)$

3) Soit l'application $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto E(3x+1)+x$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{3}\right[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

Exercice47 : Soient les deux applications :
$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ et $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{x}{x-1}$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application fog et gof.

Exercice48 : soit l'application : $h:\mathbb{R}^+\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $x\mapsto x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h=g\circ f$

2)a)Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x)=x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}=x-\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $h=g\circ f$ avec :

$f:\mathbb{R}^+\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $x\mapsto\sqrt{x}+\frac{1}{2}$ et $g:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $x\mapsto x^2$

2)a) f est une bijection en effet :

soient $y\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Resolvons l'équation : $f(x)=y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}+\frac{1}{2}=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{2y-1}{2}$$

Or $y\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc $2y-1\geq 0$ donc $x=\left(\frac{2y-1}{2}\right)^2$

donc $x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ Puisque l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution

donc :f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ .et

$f^{-1}:\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en

et : $g^{-1}:\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $x\mapsto\sqrt{x}$

c) h est la composée de deux bijections f et g

donc h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Et $\forall x\in\mathbb{R}^+$:

$$h^{-1}(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ g^{-1}(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est

$$h^{-1}:\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to\mathbb{R}^{+}$$

$$x\mapsto\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^{2}$$

Exercice49 : soient les applications :

$f:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$ et $g:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x\mapsto 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ et $x\mapsto\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{2}$

1)Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2)Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a)vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[:g(x)=(f(x))^{2}$

3)b)en déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1)

$$f([2;4[)=\{f(x)/x\in[2;4[\}=\{f(x)/2\le x\prec 4\}$$

$$=\{f(x)/\sqrt{2}-1\le\sqrt{x}-1\prec 1\}=\left\{f(x)/1\prec\frac{1}{\sqrt{x}-1}\le\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$$

$$=\{f(x)/3\prec f(x)\le 3+2\sqrt{2}\}$$

Donc : $f([2;4[)=]3;3+2\sqrt{2}]$

$$g^{-1}(\{9\})=\{x\in]1;+\infty[/g(x)\in\{9\}\}=\{x\in]1;+\infty[/g(x)=9\}$$

$$g^{-1}(\{9\})=\{x\succ 1/\sqrt{x}=2\}=\{4\}$$

2)montrons que f est injective ?

soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{x_1}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x_2}-1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x_1}-1=\sqrt{x_2}-1\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

$$\forall y\in]1;+\infty[\ y=f(x)\Leftrightarrow x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{2}$$

Et on a : $\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^{2}-1=\left(\dfrac{y+1}{y-1}-1\right)\left(\dfrac{y+1}{y-1}+1\right)=\dfrac{4y}{(y-1)^{2}}$

Donc : $\forall y\in]1;+\infty[\ \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^{2}\succ 1$ donc :

$$(\forall y\in]1;+\infty[)(\exists x\in]1;+\infty[)/\ x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{2}\text{ et }y=f(x)$$

Donc : que f est surjective de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$$\begin{cases}f(y)=x\\ y\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f^{-1}(x)=y\\ y\in]1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2}$$

Donc : $f^{-1}:]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$$x\mapsto\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2}$$

3)a)vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[$:

$$(f(x))^{2}=\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)^{2}=g(x)$$

3)b)on a : $g=h\circ f$ avec $h(x)=x^{2}$ $\forall x\in]1;+\infty[$:

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ alors $g=h\circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

et on a :

$$g^{-1}(x)=(h\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\circ h^{-1}(x)$$

$$=f^{-1}(h^{-1}(x))=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{2}=g(x)$$

Exercice50 :Soient les ensembles :

$$E=\{x\in]-\pi;2\pi[/\tan x=\sqrt{3}:x\in\mathbb{R}\}$$

$$F=\left\{x\in]-\pi;2\pi[/x=\frac{\pi}{6}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$G=\left\{x\in]-\pi;2\pi[/x=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right\}$$

Vérifier que : $S\subseteq E$ et $E\subseteq S$ et que $E=S$ et $E=G$

Vérifier que: $\dfrac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E et que $E\neq F$

Exercice51 :Soient $A=\left\{\dfrac{5n+8}{8n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\dfrac{2n+4}{2n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$

1- Est ce que : $\dfrac{17}{3}\in A$? $\dfrac{43}{25}\in B$? $\dfrac{42}{37}\in B$?

2- montrer que $\dfrac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

Exercice52 :Soit la fonction f définie par :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto\dfrac{x}{1+x^2}$

$\overline{A}=\{x\in E\,/\,x\notin A\}$

1-Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

(P) $(a\neq b)\Rightarrow(f(a)\neq f(b))$.

3-Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f(x)\in\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

4- Montrer que $(\forall y\in\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ $(\exists x\in\mathbb{R})(f(x)=y)$

Exercice53 Soient les deux applications suivantes :

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$n\mapsto(-1)^n\times n$ $\quad$ $n\mapsto\begin{cases}n.\text{si}.n.pair\\-n.si.n.impair\end{cases}$

Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})(f(n)=g(n))$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien