

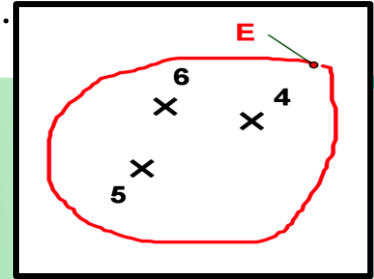
## I. Détermination d'un ensemble :

### A. Approche – vocabulaire :

Soit l'ensemble E des entiers naturels strictement compris entre 3 et 7 .

Question : écrire cet ensemble de deux façons différentes .

- 1<sup>ère</sup> façon :  $E = \{4, 5, 6\}$  . on dit que E est écrit en extension ( **écriture en extension** )
- 2<sup>ème</sup> façon :  $E = \{n \in \mathbb{N} / 3 < n < 7\}$  . on dit que E est écrit en compréhension ( **écriture en compréhension** ) .
- Certain ensemble on peut les représenter de la façon suivante : chaque élément de cet ensemble on l'écrit dans un endroit et à côté de lui on met le symbole  $\times$  ou bien  $\bullet$  puis on tourne tous les éléments par une ligne et à l'extérieur on écrit le symbole de l'ensemble E la figure obtenue s'appelle diagramme de Venn



### B. Application :

1. Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

$$F = ]-5, 5[ - A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

2. Ecrire les ensembles suivants en extension :

$$B = \{d \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, 20 = k \times d\} - C = \{p \in \mathbb{Z} / (p-3)(2p-5) = 0\}.$$

## II. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION - ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

### A. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION :

#### 1. L'INCLUSION :

##### a. Définition :

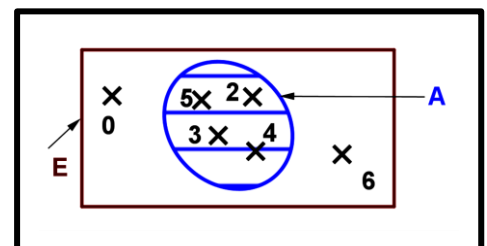
On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si et seulement si tout élément x de A est aussi un élément de B . On note  $A \subset B$  .

b. Remarque :  $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$  .

##### c. Exemple :

Soient les ensembles  $E = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  .

1. Donner le diagramme de Venn de A et E .



### B. Egalité de deux ensembles ( OU DOUBLE INCLUSION )

##### a. Définition :

On dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si  $A \subset B$  et  $B \subset A$  .

b. Remarque :  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$  . Ou bien  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  .

##### c. Exemple :

Soient les ensembles :  $F = ]0, 1[$  et  $E = \left\{ \frac{1}{x} / x \in \mathbb{R} \text{ et } x > 1 \right\}$  .

Démontrer que :  $E = F$  .

- On démontre que :  $E \subset F$  .

Soit  $y \in E \Rightarrow y = \frac{1}{x}$  et  $x > 1$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < y < 1$$

**Conclusion 1 :**  $E \subset F$ .

- **On démontre que :**  $F \subset E$

**Soit :**

$$y \in F \Rightarrow 0 < y < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \left( \text{on pose } y = \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ et } y = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y \in E$$

**Conclusion 1 :**  $F \subset E$

**Par suite :**  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .

**Conclusion :**  $E = F$

### C. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

#### a. Activité :

Soit l'ensemble  $E = \{1, 2, 3\}$ . Donner toutes les parties de  $E$ .

les parties de  $E$  sont :  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$  et  $\{1, 2, 3\}$ .

#### b. Vocabulaire :

L'ensemble constitué par ses parties c.à.d.  $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

s'appelle **ensemble des parties d'un ensemble de  $E$**  sera noté  $\mathcal{P}(E)$ .

#### c. Définition :

$E$  est un ensemble.

Toutes les parties de  $E$  constituent un ensemble s'appelle **ensemble des parties d'un ensemble de  $E$**  sera noté  $\mathcal{P}(E)$ .

#### d. Remarque :

- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$ .
- Les éléments de  $\mathcal{P}(E)$  sont « sous forme des ensembles ».
- $E = \emptyset$  on a  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ .

#### e. Exemple :

Ecrire en extension  $\mathcal{P}(E)$  tel que : 1)  $E = \{2\}$  . 2)  $E = \{\emptyset\}$  . 3)  $E = \{1, 2\}$  . 4)  $E = \{\{1, 2\}\}$

**Réponse :**

- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{1, 2\}\}.$$

### III. OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES :

#### A. INTERSECTION DE DEUX ENSEMBLES :

##### a. Définition :

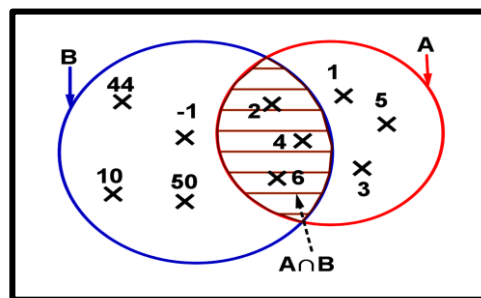
A et B sont deux ensembles .

Les éléments communs de A et B constituent l'ensemble noté  $A \cap B$  appelé intersection de A et B

Donc :  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$  .

b. Remarque :  $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$  .

c. Exemple : soient :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$



##### d. Application :

$A = \{p \in \mathbb{Z} / 2 \leq |p| \leq 5\}$  déterminer  $A \cap ]-\infty, 3[$  .

##### e. Propriétés :

A et B et C sont trois ensembles .

- $A \cap \emptyset = \emptyset$  et  $A \cap A = A$
- $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$
- $A \cap B = B \cap A$  ( $\cap$  est commutative)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$  ( $\cap$  est associative) .

##### f. Démonstration : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

On a :

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ et } x \in C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \text{ (la conjonction (et) est associative)}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap (A \cap B)$$

**Conclusion :**  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  .

#### B. L'UNION :

##### a. Définition :

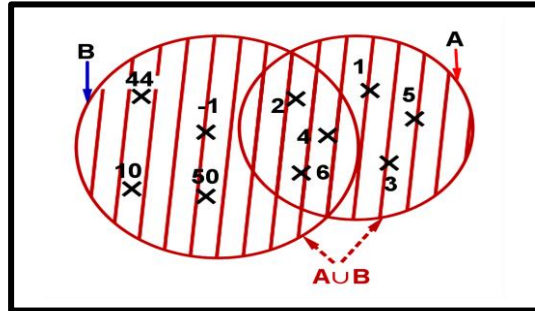
A et B sont deux ensembles .

Les éléments qui appartiennent à A ou à B constituent l'ensemble noté  $A \cup B$  appelé union de A

et B . Donc :  $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

**b. Remarque :**  $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$ .

**c. Exemple :** soient :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$



**d. Propriétés :**

A et B et C sont trois ensembles .

- $A \cup \emptyset = A$  et  $A \cup A = A$
- $A \subset (A \cup B)$  et  $B \subset (A \cup B)$ .
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $\cup$  est commutative :  $A \cup B = B \cup A$  .
- $\cup$  est associative :  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$  .
- $\cup$  est distributive sur  $\cap$  :  $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \end{cases}$

**e. Application :**

Démontrer que :  $\cap$  est distributive sur  $\cup$  .

- On montre que :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  ‘ la distributivité à gauche de  $\cap$  sur  $\cup$  .

On a :

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ (la conjonction est distributive sur la disjonction)}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**Conclusion 1 :**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  .

- On montre que :  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$  ‘ la distributivité à gauche de  $\cap$  sur  $\cup$  .

On a :

$$(B \cup C) \cap A = A \cap (B \cup C) \text{ (}\cap \text{ est commutative)}$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ ( d'après la conclusion 1)}$$

$$= (B \cap A) \cup (C \cap A) \text{ (}\cap \text{ est commutative)}$$

**Conclusion 2 :**  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$  .

**Conclusion** l'intersection est distributive sur l'union .

**C. Partie complémentaire :**

**a. Définition :**

A est une partie d'un ensemble E ( $A \subset E$ ).

L'ensemble B qui contient tous les éléments de E et qui n'appartiennent pas à la partie A s'appelle la partie complémentaire de A dans E, on note  $B = C_E^A$  ou encore  $B = \bar{A}$ .

Donc :  $B = C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$

**b. Remarques :**

- $x \in C_E^A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$ .
- $x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$

**c. Exemples :**

- soient :

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \text{ et } A = \{1, 2, 7, 8, 10, 12, 13\}$$

on a  $A \subset E$  d'où :  $C_E^A = \{3, 4, 5, 6, 9, 11\}$ .

- $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}^{-*}$  et  $C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} = ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$

**d. Propriétés :**

E est un ensemble .

- $C_E^{\emptyset} = E$  et  $C_E^E = \emptyset$ .
- $\bar{\bar{A}} = A$  c.à.d.  $C_E^{C_E^A} = A$ .
- $A \cap \bar{A} = A \cap C_E^A = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = A \cup C_E^A = E$ .
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  et  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

**e. Démonstration :**

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Rappel :  $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

On a :

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in E \cap E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \quad ; (E \cap E = E)$$

$$\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

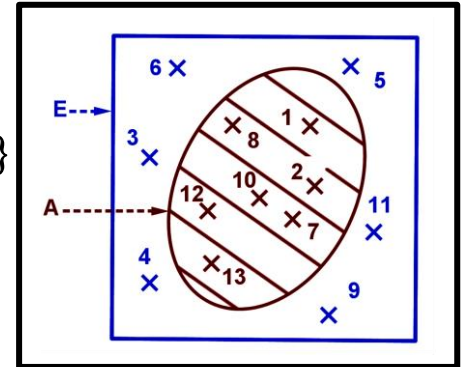
Conclusion :  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Rappel :  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

On a :



$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

#### D. La différence de deux ensembles :

##### a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

Les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B constituent l'ensemble qui est noté  $A \setminus B$  appelé différence de l'ensemble A et l'ensemble B (l'ordre est important) .

Donc :  $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

##### b. Remarque : $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$ .

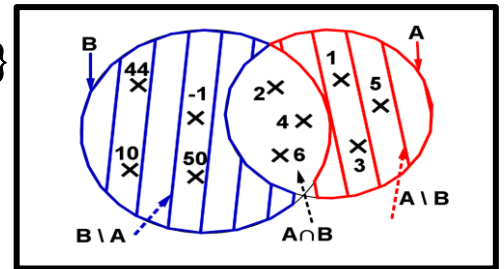
##### c. Exemple : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$

On a :  $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$  et  $B \setminus A = \{-1, 10, 44, 50\}$  .

##### d. Exercice :

Déterminer :  $A \setminus B$  puis  $B \setminus A$  avec :

- $A = \mathbb{Z}$  et  $B = \mathbb{N}^*$  .
- $A = \mathbb{R}$  et  $B = [1, 5[$



#### E. La différence symétrique :

##### a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

La différence symétrique de A et B est l'ensemble noté  $A \Delta B$  tel que :  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  .

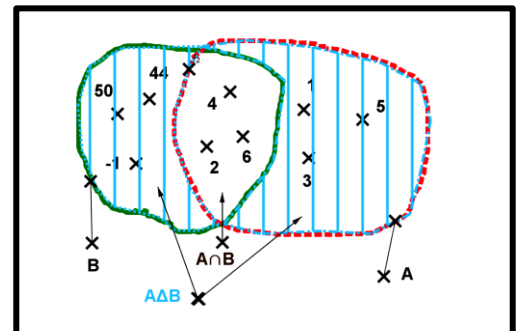
Donc :  $A \Delta B = \{x / (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}$

##### b. Remarques :

- $A \Delta B = B \Delta A$  .
- $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$  .
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  .
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  .
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B$

Exemple :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$

- On représente  $A \cap B$  et  $A \Delta B$  par un diagramme de Venn
- On a :  $A \Delta B = \{1, 3, 5, -1, 44, 50\}$  et  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$  .



#### F. Produit cartésien de deux ensembles :

##### a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté  $A \times B$  qui est constitué par tous les couples  $(x, y)$  tel que  $x \in A$  et  $y \in B$  ..

Donc :  $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

**b. Remarques :**

- $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B)$
- $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$ .
- $A \times B \neq B \times A$  ( en général )
- Si  $A = B$  on note :  $A \times A = A^2$
- $B \times A = \{(x, y) / x \in B \text{ et } y \in A\}$

**c. Exemple :**  $A = \{1, 2\}$  et  $B = \{a, b, c\}$

- On représente  $A \cap B$  et  $A \Delta B$  par un diagramme de Venn
- On a :  $A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$  .

**d. Application :**

**1.** Ecrire en extension  $E \times F$  tel que :  $E = \{1, 2\}$  et  $F = \{1, 2, 3\}$  .

**2.**  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . Montrer que :  $(A \subset E \text{ } B \subset F) \Rightarrow A \times B \subset E \times F$  .

**e. Généralisation :**

**1.**  $E_1$  et  $E_2$  et  $E_3$  sont trois ensembles .

- $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  et  $x_3 \in E_3$  l'écriture  $(x_1, x_2, x_3)$  s'appelle le triplet est un élément de l'ensemble qui est noté  $E_1 \times E_2 \times E_3$  , on l'appelle produit cartésien de  $E_1$  et  $E_2$  et  $E_3$  dans cet ordre .
- $E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x, y, z) / x \in E_1 \text{ et } y \in E_2 \text{ et } z \in E_3\}$ .

**Cas général :**

**2.** On considère les ensembles  $E_i$  avec  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  .

- le produit cartésien de  $E_1$  et  $E_2$  et  $E_3$  et ....et  $E_n$  dans cet ordre est l'ensemble qui est noté

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \text{ ou encore } \prod_{j=1}^{j=n} E_j .$$

- Les éléments de  $\prod_{j=1}^{j=n} E_j$  sont notés par  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  chaque élément s'appelle  $n$  –uplet avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  et  $x_3 \in E_3$  et ....et  $x_n \in E_n$  .

- $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^{j=n} E_j \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

$$\Leftrightarrow x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n \text{ ( ou } x_i \in E_i \text{ , } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ )}$$

- Cas particulier :  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$  on note  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = E^n$
- Exemple:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  d'où le triplet  $(2, -5, \sqrt{7})$  est un élément de  $\mathbb{R}^3$  on écrit  $(2, -5, \sqrt{7}) \in \mathbb{R}^3$