

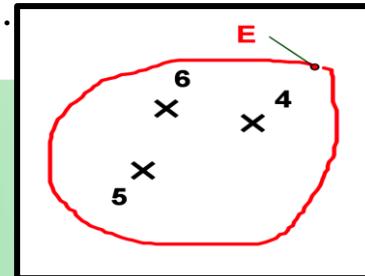
I. Détermination d'un ensemble :

A. Approche – vocabulaire :

Soit l'ensemble E des entiers naturels strictement compris entre 3 et 7 .

Question : écrire cet ensemble de deux façons différentes .

- 1^{ère} façon : $E = \{4, 5, 6\}$. on dit que E est écrit en extension (**écriture en extension**)
- 2^{ième} façon : $E = \{n \in \mathbb{N} / 3 < n < 7\}$. on dit que E est écrit en compréhension (**écriture en compréhension**) .
- Certain ensemble on peut les représenter de la façon suivante : chaque élément de cet ensemble on l'écrit dans un endroit et à côté de lui on met le symbole \times ou bien \bullet puis on tourne tous les éléments par une ligne et à l'extérieur on écrit le symbole de l'ensemble E la figure obtenue s'appelle **diagramme de Venn**



B. Application :

1. Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

$$F =]-5, 5[- A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

2. Ecrire les ensembles suivants en extension :

$$B = \{d \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, 20 = k \times d\} - C = \{p \in \mathbb{Z} / (p-3)(2p-5) = 0\}.$$

II. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION – ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

A. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION :

1. L'INCLUSION :

a. Définition :

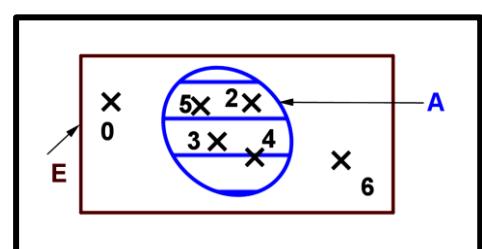
On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si et seulement si tout élément x de A est aussi un élément de B . On note $A \subset B$.

b. Remarque : $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

c. Exemple :

Soient les ensembles $E = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 3, 4, 5\}$.

1. Donner le diagramme de Venn de A et E .



B. Égalité de deux ensembles (OU DOUBLE INCLUSION)

a. Définition :

On dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

b. Remarque : $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$. Ou bien $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

c. Exemple :

Soient les ensembles : $F =]0, 1[$ et $E = \left\{ \frac{1}{x} / x \in \mathbb{R} \text{ et } x > 1 \right\}$.

Démontrer que : $E = F$.

- On démontre que : $E \subset F$.

Soit $y \in E \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ et $x > 1$

$$\Rightarrow x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < y < 1$$

Conclusion 1 : $E \subset F$.

- On démontre que : $F \subset E$

Soit :

$$y \in F \Rightarrow 0 < y < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \left(\text{on pose } y = \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow x > 1 \text{ et } y = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y \in E$$

Conclusion 1 : $F \subset E$

Par suite : $E \subset F$ et $F \subset E$.

Conclusion : $E = F$

C. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

a. Activité :

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. Donner toutes les parties de E .

les parties de E sont : \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$.

b. Vocabulaire :

L'ensemble constitué par ses parties c.à.d. $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

s'appelle **ensemble des parties d'un ensemble de E** sera noté $\mathcal{P}(E)$.

c. Définition :

E est un ensemble.

Toutes les parties de E constituent un ensemble s'appelle **ensemble des parties d'un ensemble de E** sera noté $\mathcal{P}(E)$.

d. Remarque :

- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.
- Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont « sous forme des ensembles ».
- $E = \emptyset$ on a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

e. Exemple :

Ecrire en extension $\mathcal{P}(E)$ tel que : 1) $E = \{2\}$. 2) $E = \{\emptyset\}$. 3) $E = \{1, 2\}$. 4) $E = \{\{1, 2\}\}$

Réponse :

- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$.

III. OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES :

A. INTERSECTION DE DEUX ENSEMBLES :

a. Définition :

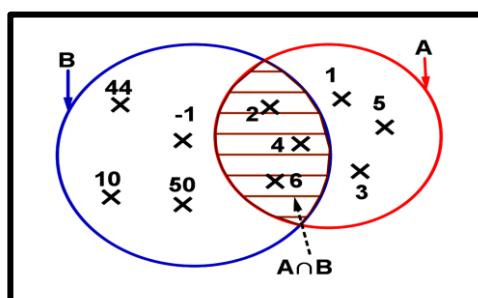
A et B sont deux ensembles .

Les éléments communs de A et B constituent l' ensembles noté $A \cap B$ appelé intersection de A et B

Donc : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

b. Remarque : $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$.

c. Exemple : soient : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$



d. Application :

$A = \{p \in \mathbb{Z} / 2 \leq |p| \leq 5\}$ déterminer $A \cap]-\infty, 3[$.

e. Propriétés :

A et B et C sont trois ensembles .

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap A = A$
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \cap B = B \cap A$ (\cap est commutative)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ (\cap est associative) .

f. Démonstration : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

On a :

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ et } x \in C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \text{ (la conjonction (et) est associative)} \\
 &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in A \cap B \\
 &\Leftrightarrow x \in A \cap (A \cap B)
 \end{aligned}$$

Conclusion : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

B. L'UNION :

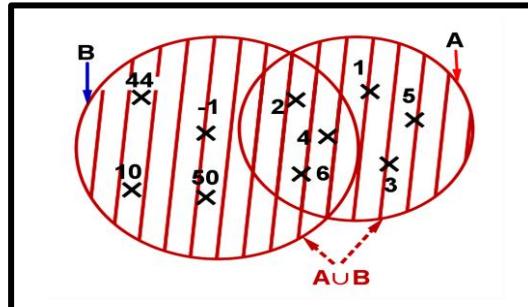
a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

Les éléments qui appartiennent à A ou à B constituent l' ensembles noté $A \cup B$ appelé union de A et B . Donc : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

b. Remarque : $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$.

c. Exemple : soient : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$



d. Propriétés :

A et B et C sont trois ensembles .

- $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup A = A$
- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- \cup est commutative : $A \cup B = B \cup A$.
- \cup est associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
- \cup est distributive sur \cap : $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \end{cases}$

e. Application :

Démontrer que : \cap est distributive sur \cup .

- On montre que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ‘ la distributivité à gauche de \cap sur \cup .

On a :

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$ (la conjonction est distributive sur la disjonction)

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Conclusion 1 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- On montre que : $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ ‘ la distributivité à gauche de \cap sur \cup .

On a :

$$(B \cup C) \cap A = A \cap (B \cup C) \quad (\cap \text{ est commutative})$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{d'après la conclusion 1})$$

$$= (B \cap A) \cup (C \cap A) \quad (\cap \text{ est commutative})$$

Conclusion 2 : $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

Conclusion l'intersection est distributive sur l'union .

C. Partie complémentaire :

a. Définition :

A est une partie d'un ensemble E ($A \subset E$).

L'ensemble B qui contient tous les éléments de E et qui n'appartiennent pas à la partie A s'appelle la partie complémentaire de A dans E, on note $B = C_E^A$ ou encore $B = \bar{A}$.

Donc : $B = C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$

b. Remarques :

- $x \in C_E^A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$.
- $x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$

c. Exemples :

- soient :

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ et $A = \{1, 2, 7, 8, 10, 12, 13\}$

on a $A \subset E$ d'où : $C_E^A = \{3, 4, 5, 6, 9, 11\}$.

- $C_{\mathbb{Z}}^N = \mathbb{Z}^{-*}$ et $C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

d. Propriétés :

E est un ensemble.

- $C_E^{\emptyset} = E$ et $C_E^E = \emptyset$.
- $\bar{\bar{A}} = A$ c.à.d. $C_E^{C_E^A} = A$.
- $A \cap \bar{A} = A \cap C_E^A = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = A \cup C_E^A = E$.
- $\bar{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

e. Démonstration :

- $\bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Rappel : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

On a :

$$\begin{aligned}
 x \in \bar{A \cup B} &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \\
 &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\
 &\Leftrightarrow x \in E \cap E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \quad ; \quad (E \cap E = E) \\
 &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B} \\
 &\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}
 \end{aligned}$$

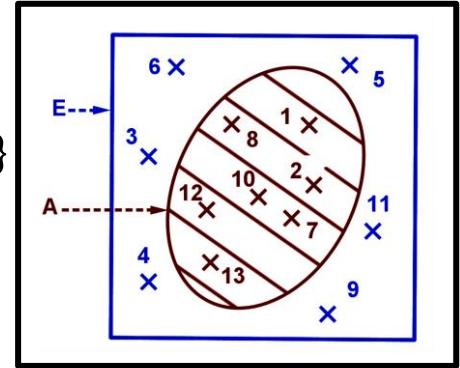
Conclusion : $\bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

- $\bar{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Rappel : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

On a :



$$\begin{aligned}
 x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\
 &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\
 &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\
 &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

D. La différence de deux ensembles :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles.

Les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B constituent l'ensembles qui est noté $A \setminus B$ appelé différence de l'ensemble A et l'ensemble B (l'ordre est important).

Donc : $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

b. Remarque : $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$.

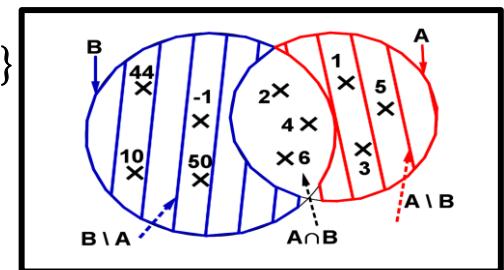
c. Exemple : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$

On a : $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ et $B \setminus A = \{-1, 10, 44, 50\}$.

d. Exercice :

Déterminer : $A \setminus B$ puis $B \setminus A$ avec :

- $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}^*$.
- $A = \mathbb{R}$ et $B = [1, 5[$



E. La différence symétrique :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles.

La différence symétrique de A et B est l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Donc : $A \Delta B = \{x / (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}$

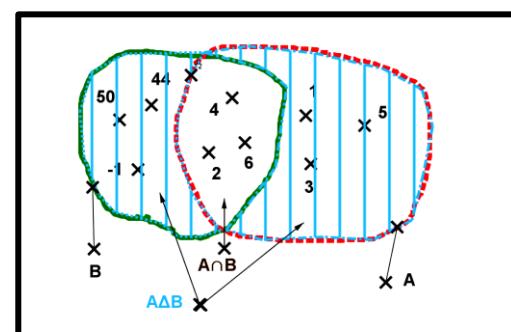
b. Remarques :

- $A \Delta B = B \Delta A$.
- $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B$

Exemple : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$

On représente $A \cap B$ et $A \Delta B$ par un diagramme de Venn

On a : $A \Delta B = \{1, 3, 5, -1, 44, 50\}$ et $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.



F. Produit cartésien de deux ensembles :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles.

Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ qui est constitué par tous les couples (x, y) tel que $x \in A$ et $y \in B$.

Donc : $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

b. **Remarques :**

- $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B)$
- $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$.
- $A \times B \neq B \times A$ (en général)
- Si $A = B$ on note : $A \times A = A^2$
- $B \times A = \{(x, y) / x \in B \text{ et } y \in A\}$

c. **Exemple :** $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$

- On représente $A \cap B$ et $A \Delta B$ par un diagramme de Venn

On a : $A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$.

d. **Application :**

1. Ecrire en extension $E \times F$ tel que : $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

2. $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que : $(A \subset E \text{ et } B \subset F) \Rightarrow A \times B \subset E \times F$.

e. **Généralisation :**

1. E_1 et E_2 et E_3 sont trois ensembles .

- $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ et $x_3 \in E_3$ l'écriture (x_1, x_2, x_3) s'appelle le triplet est un élément de l'ensemble qui est noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, on l'appelle produit cartésien de E_1 et E_2 et E_3 dans cet ordre .
- $E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x, y, z) / x \in E_1 \text{ et } y \in E_2 \text{ et } z \in E_3\}$.

Cas général :

2. On considère les ensembles E_i avec $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

- le produit cartésien de E_1 et E_2 et E_3 etet E_n dans cet ordre est l'ensemble qui est noté

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou encore $\prod_{j=1}^{j=n} E_j$.

- Les éléments de $\prod_{j=1}^{j=n} E_j$ sont notés par $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ chaque élément s'appelle n - uplet avec

$x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ et $x_3 \in E_3$ etet $x_n \in E_n$.

- $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^{j=n} E_j \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

$\Leftrightarrow x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ etet } x_n \in E_n$ (ou $x_i \in E_i$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$)

- Cas particulier : $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$ on note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = E^n$

- Exemple: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ d'où le triplet $(2, -5, \sqrt{7})$ est un élément de \mathbb{R}^3 on écrit $(2, -5, \sqrt{7}) \in \mathbb{R}^3$