الأستاذ: بنموسى محمد

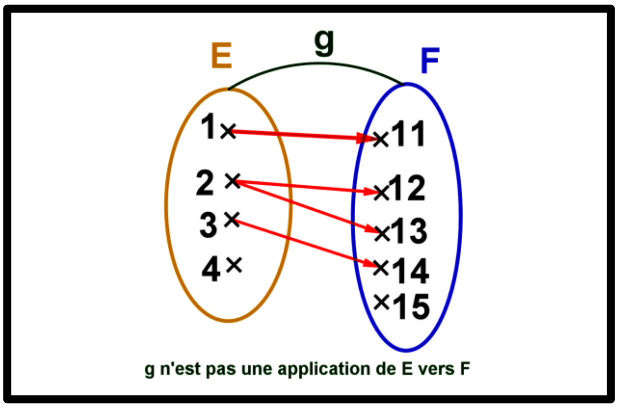
I. GENERALITES :

A. Application :

a. Activité :

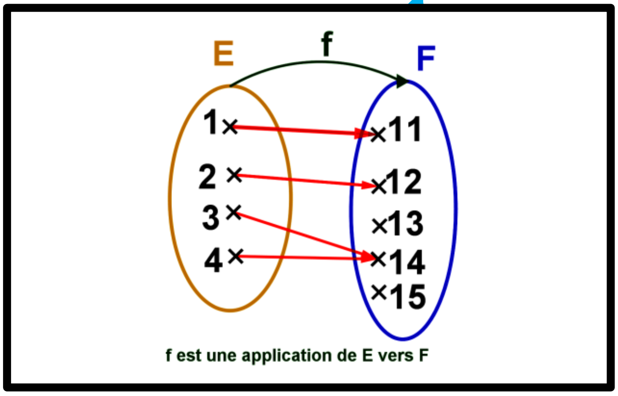
- On considère les ensembles $E=\{1,2,3,4\}$ et $F=\{11,12,13,14,15\}$.
- On considère la relation f (ou g) qui associe élément de E par un élément de F voir figures

Cas N° 1



g n'est pas une application de E vers F

Cas N° 2



f est une application de E vers F

Que remarquez vous ?

b. Vocabulaire :

- La relation f est appelée application de E vers F on note f ou g ou h .
- L'ensemble E est appelé ensemble de départ (ou de source)
- L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivé (ou de but)
- Elément de E on le note par x et on l'appelle antécédent .
- Elément de F on le note par y et on l'appelle image .
- L'application f qui associe x par y pour cela on note $f(x)=y$.
- On résume ce qui précède par : $f:E\to F$

$$x\mapsto f(x)=y$$

c. Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides .
Toute relation f qui associe chaque élément x de E par un et un seul élément y de F est appelée application de E vers F, on la note par : $\begin{array}{l} f:E\to F \\ x\mapsto f(x)=y \end{array}$ ou encore $f:E\to F$

d. Remarque :

- Toute fonction est une application de son ensemble de définition D_f vers $\mathbb{R}$.
- Toute application $f:E\to F$ est une fonction de $f:E\to F$.
- Si $F=E$ on dit que f est une application dans E .
- Soient f et g deux applications tel que :

$\begin{array}{l} f:E\to F \\ x\mapsto f(x)=y \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:E'\to F' \\ x\mapsto g(x)=y \end{array}$ sont égales si et seulement $\left.\begin{array}{l} E=E' \wedge F=F' \\ \forall x\in E: f(x)=g(x) \end{array}\right\}$

On note $f=g$

e. Applications :

- On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N} \\ n\mapsto f(n)=|n| \end{array}$

1. Déterminer les images de 0 et -2 et 3 .

2. Déterminer les antécédents de 1 et 0 et 3 .

3. Est-ce que l'implication $f(n)=f(n') \Rightarrow n=n'$ est vraie ?

❖ On considère l'application : $\begin{array}{rl} f: & \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ & (n,m) \mapsto f((n,m)) = n\times m \end{array}$

1. Déterminer les images de $(1,0)$ et $(2,-3)$ et $(-6,1)$.

2. Déterminer les antécédents de 1 et 6 et 0 .

3. Est-ce que pour tout (n,m) et (n',m') de $\mathbb{N}^2$, l'implication $f((n,m))=f((n',m')) \Rightarrow (n=n' \text{ et } m=m')$ est vraie ?

❖ On considère les deux applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto g(x)=x^2-1 \end{array}$

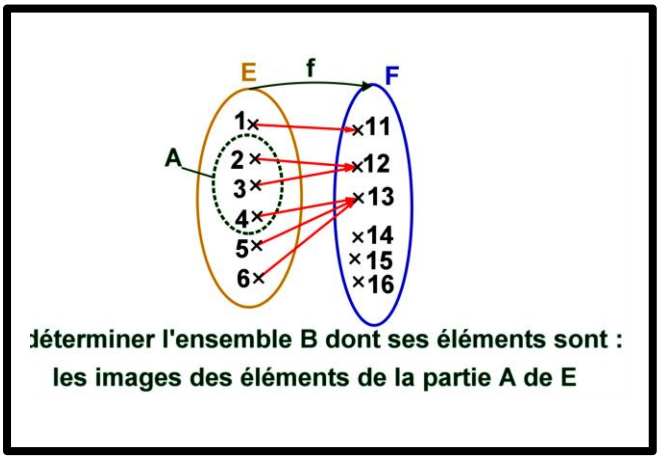
1. Est-ce que $f=g$?

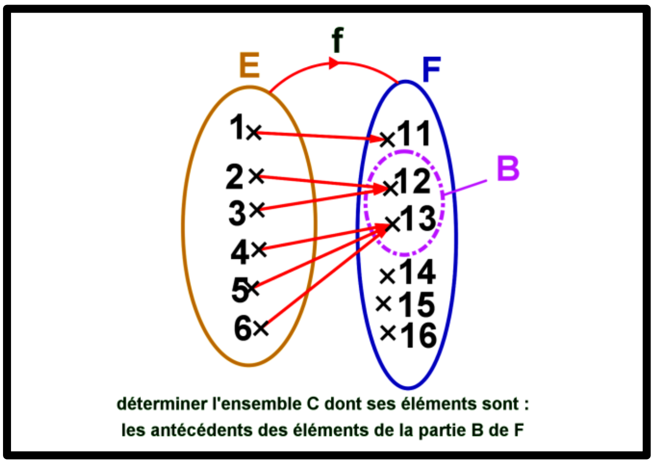
B. L'image directe d'une partie A de l'ensemble de départ - L'image réciproque d'une partie B de l'ensemble d'arrivé .

a. Activité : on considère l' applications suivante :

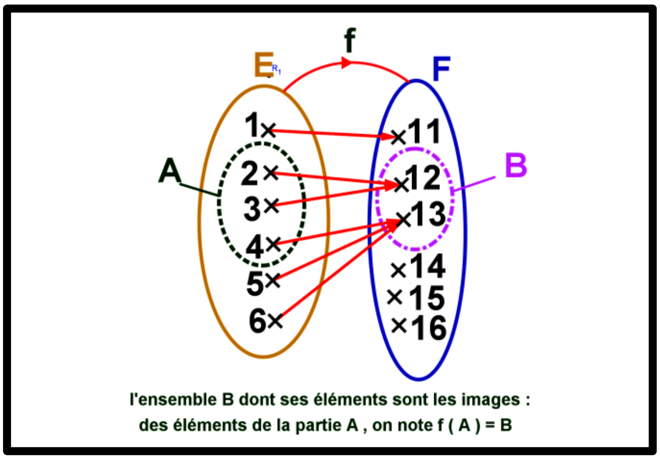
1 . déterminer la partie B de F tel que ses éléments sont : les images des éléments de A

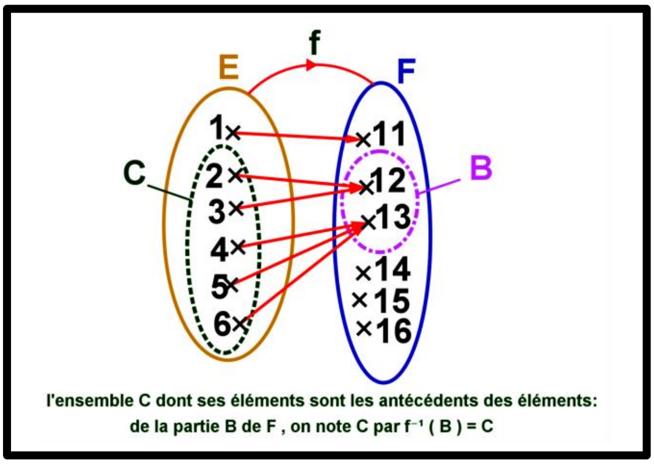
2. déterminer la partie C de E tel que ses éléments sont : les antécédents des éléments de B





b. Réponse :





c. Vocabulaire :

1 la partie $B=\{12,13\}$ est appelée **l'image directe** de la partie A de l'ensemble de départ E

et on note : $B=f(A)$

et on a $f(A)=\{f(x)/x\in A\}$

2 la partie $C=\{2,3,4,5,6\}$ est appelée **l'image réciproque** de la partie B de l'ensemble d'arrivé E

et on note : $C=f^{-1}(B)$

et on a : $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$

d. Définitions :

Définition 1 : (l'image directe)

$f:E\to F$ est une application et A est une partie de E $(A\subset E)$.

Les images des éléments de la partie A de E constitue une partie B de F est appelée image directe de A et on note $B=f(A)$ ou encore $B=f(A)=\{f(x)/x\in A\}\subset F$.

D'où : $y\in f(A)\Leftrightarrow \exists x\in A\ ,\ y=f(x)$.

Définition 1 : (l'image réciproque)

$f:E\to F$ est une application et B est une partie de F $(B\subset F)$.

Les antécédents des éléments de la partie B de E constitue une partie C de E est appelée image réciproque de B ou encore $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}\subset E$.

D'où : $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$.

e. Application :

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f:\ & \mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ & n\mapsto f(n)=2n \end{aligned}$

1. Déterminer $f(\{0,1,2,5\})$ et $f^{-1}(\{4,6,12\})$.

2. Déterminer : $f(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\})=f^{-1}(2\mathbb{N})$.

3. Est-ce que l'implication suivante est vraie: $\forall n,n'\in\mathbb{N}: f(n)=f(n')\Rightarrow n=n'$.

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f:\ & \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ & X=(a,b)\mapsto f(X)=f((a,b))=a \end{aligned}$

1. Déterminer $f((2,1))$ et $f((2,7))$.

2. Ecrire en compréhension $f^{-1}(\{2\})$ (c.à.d. ensemble des antécédents de 2) :

3. Est-ce que l'implication suivante est vraie:
$\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2,\forall(a',b')\in\mathbb{N}^2:\ f((a,b))=f((a',b'))\Rightarrow(a,b)=(a',b')$.

f. Propriétés :

- $f:E\to F$ est une application
- A et B deux parties d'un ensemble E (de départ). C et D deux parties d'un ensemble F (d'arrivé)

1. $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$.
2. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
3. $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
4. $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.
5. $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

6. $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

g. Démonstration :

1. Montrons que : $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$.

   On a $A\subset B$ et on démontre que $f(A)\subset f(B)$.

   Soit $y_A\in f(A)$

   D'où $y_A\in f(A)\Leftrightarrow \exists x_A\in A / y_A=f(x_A)$ (1)

   Donc : $(1)\Rightarrow \exists x_A\in B / y_A=f(x_A)$ (car $A\subset B$).

   Par suite : $f(x_A)\in f(B)$.

   Conclusion : $f(A)\subset f(B)$.

2. Montrons que : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

- D'abord , on montre que : $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

  Soit y de $f(A\cup B)$ donc il existe $x\in A\cup B$ tel que : $y=f(x)$.

  D'où : $x\in A\cup B\Rightarrow (x\in A \text{ et } x\in B)$

  $\Rightarrow (f(x)\in f(A) \text{ et } f(x)\in f(B))$

  $\Rightarrow y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$

  Conclusion 1 : $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$

- Montrons que : $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

  On a : $A\subset A\cup B\Rightarrow f(A)\subset f(A\cup B)$ (d'après 1) .

  $B\subset A\cup B\Rightarrow f(B)\subset f(A\cup B)$

  donc : $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$

  Conclusion 2 : $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$

  Conclusion : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

3. Montrons que : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

   Soit y de $f(A\cap B)$ donc il existe $x\in A\cap B$ tel que : $y=f(x)$.

   $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A \text{ et } x\in B$

   $\Rightarrow f(x)\in f(A) \text{ et } f(x)\in f(B)$

   $\Rightarrow y=f(x)\in f(A)\cap f(B)$

   Conclusion : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

4. Montrons que : $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.

   Soit : x de $f^{-1}(C)$

   $x\in f^{-1}(C)\Rightarrow f(x)\in C$

   $\Rightarrow f(x)\in D$; $(C\subset D)$

   $\Rightarrow x\in f^{-1}(D)$

   Conclusion : $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.

5. Montrons que : $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

- D'abord , on montre que : $f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

On a : $\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset A\Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A) \\ A\cap B\subset B\Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(B)\end{array}\right\}$ donc : $f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

- Montrons que : $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cap D)$

Soit x de $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

$x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ et $x\in f^{-1}(D)$.

$\Rightarrow f(x)\in C$ et $f(x)\in D$

$\Rightarrow f(x)\in C\cap D$

$\Rightarrow x\in f^{-1}(C\cap D)$

D'où : $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cap D)$

Conclusion : $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

6. Montrons que : $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

- D'abord , on montre que : $f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cup D)$

On a : $\left.\begin{array}{l} A\subset A\cup B\Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(A\cup B) \\ B\subset A\cup B\Rightarrow f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)\end{array}\right\}$ donc : $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$

Conclusion 1 : $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$

- Montrons que : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Soit x de $f^{-1}(C\cup D)$

$x\in f^{-1}(C\cup D)\Rightarrow f(x)\in C\cup D$

$\Rightarrow f(x)\in C$ et $f(x)\in D$

1er cas $f(x)\in C$

Donc : $x\in f^{-1}(C)$ et on sait que $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

2^{ième} cas : $f(x)\in D$

Donc : $x\in f^{-1}(D)$ et on sait que $f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Pour les deux cas on a : $x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Par suite : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Conclusion 2 : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

Conclusion : $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

Remarque : on peut démontrer que par les équivalences successives .

C. Restriction d'une fonction – prolongement d'une fonction :

a. Activité : On considère les deux applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=|x|-5x\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:[0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=-4x\end{array}$.

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$

2. Quelle relation relie les deux fonctions .
Réponse pour la 2ième
Relations :

- $[0,+\infty[\subset\mathbb{R}$.
- $\forall x\in[0,+\infty[\ ,g(x)=f(x)$

b. Vocabulaire :

- L'application g restreint à donner les images des x de $[0,+\infty[$; pour cela l'application g est appelé restriction de f sur $[0,+\infty[$.
- l'application f est appelé prolongement de g sur $\mathbb{R}$. (f continue à donner les images x de $]-\infty,0[$ car g est définie juste sur $[0,+\infty[$) .

c. définition 1 :

$f:E\to F$ est une application et B est une partie de F $(B\subset F)$.
Toute application g tel que :
1. Ensemble de départ est une partie A de E ($A\subset E$) .
2. $\forall x\in A:g(x)=f(x)$.

l'application g est appelée restriction de f sur A . donc : $\begin{array}{l} g:A\ (A\subset E)\to F \\ x\mapsto g(x)=f(x)\end{array}$

d. définition 2 :

$f:E\to F$ est une application et B est un ensemble tel que $E\subset B$.
Toute application h tel que :
3. Ensemble de départ est B avec $(E\subset B)$.
4. $\forall x\in E\ ,h(x)=f(x)$.

l'application h est appelée prolongement de f sur B . donc : $\begin{cases} x\in E\ ,h(x)=f(x) \\ x\in B\setminus E\ ,h(x)=h(x)\end{cases}$.

e. Remarque : prolongement n'est pas unique

f. Application :

❖ On considère les deux applications : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=|x|-5x\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:[0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=-4x\end{array}$

1. Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0,+\infty[$

❖ On considère les applications : $\begin{array}{l} f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=2x^3\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:[0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=-4x\end{array}$

2. Est-ce que l'application g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$?

avec : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto g(x)=-2x^4+2x^3|x+1|\end{array}$

II. APPLICATION : INJECTIVE – SURJECTIVE – BIJECTIVE ET LA BIJECTION R2CIPROQUE :

A. APPLICATION INJECTIVE

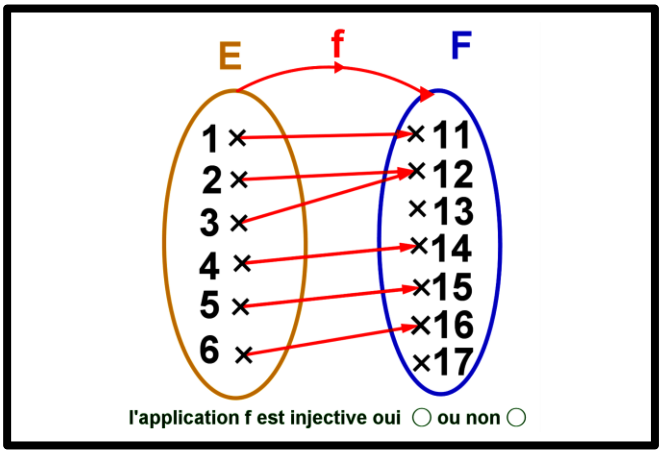
a. Définition :

$f : E \to F$ est une application .

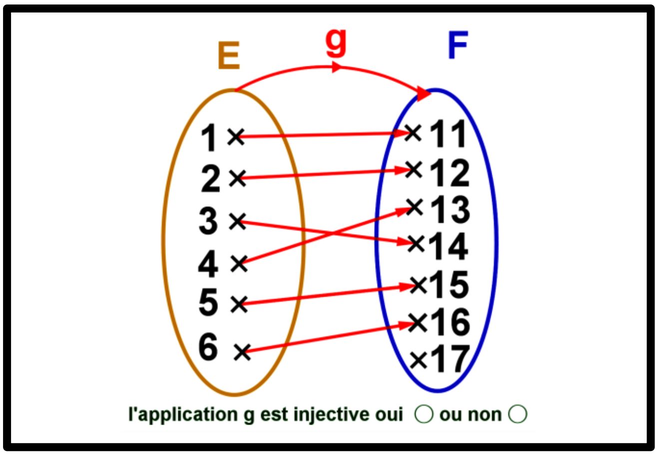
f est appelée application injective (ou f est une injection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au plus un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est injective) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right)$

b. exemple : On considère les deux applications suivantes :



l'application f est injective oui ○ ou non ○



l'application g est injective oui ○ ou non ○

c. Application : On considère l'applications :

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f((x,y)) = (x,0)$$

1. Est-ce que l'application f est injective ?

B. APPLICATION SURJECTIVE :

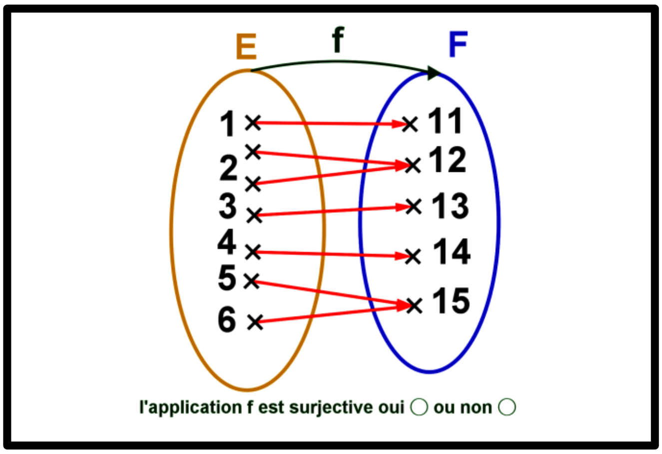
a. Définition :

$f : E \to F$ est une application .

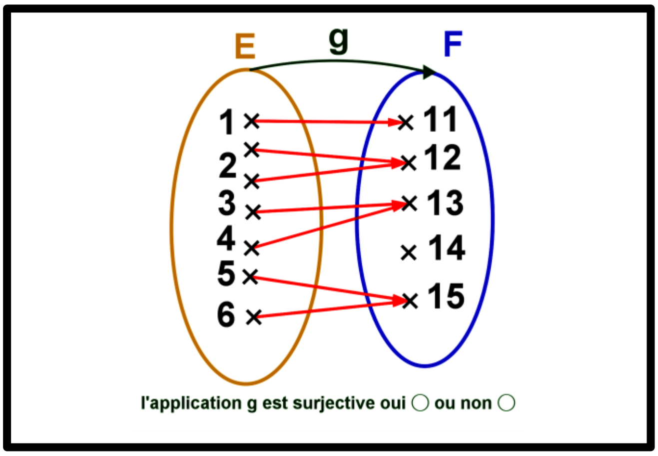
f est appelée application surjective (ou f est une surjection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au moins un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est surjective) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)\right)$

a. exemple : On considère les deux applications suivantes :



l'application f est surjective oui ○ ou non ○



l'application g est surjective oui ○ ou non ○

b. Remarque :

- Pour démontrer que f est surjective , il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet au moins une solution x

dans E pour tout y de F . (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F) .

- (f est surjective) $\Leftrightarrow$ $f(E)=F$.

c. Application :

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=3|x| \end{aligned}$

1. Est-ce que f est surjective ?

2. Est-ce que g la restriction de f sur $[0,+\infty[$ surjective tel que : $\begin{aligned} g : [0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x)=3x|x+1|-3x^2 \end{aligned}$?

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f((x,y))=(x,0) \end{aligned}$

1. Est-ce que f est surjective ?

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=x^2-2x \end{aligned}$

1. Est-ce que f est surjective ?

C. APPLICATION BIJECTIVE L'APPLICATION RECIPROQUE :

a. Définition :

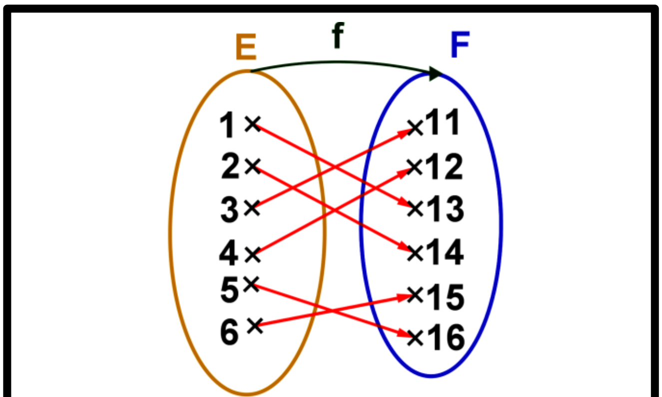
$f : E \to F$ est une application .

- f est appelée application bijective (ou f est une bijection) si et seulement si pour chaque élément y de F a un et un seul antécédent x de l'ensemble de départ E .

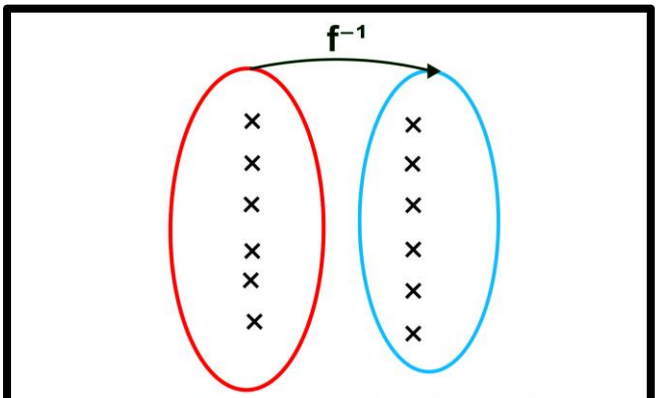
  Ou encore : (f est bijective) $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F, \exists! x \in E : y=f(x))$.

- L'application g de F vers E qui associe à chaque élément y de F par l'unique élément x de E tel que $f(x)=y$ est appelée application réciproque de l'application f et on note $g=f^{-1}$

b. Exemple : On considère les deux applications suivantes :



l'application f est bijective oui ◯ ou non ◯



si f est bijective donner l'application réciproque f^{-1} de f

b. Remarques :

- (f est une application bijective) $\Leftrightarrow$ (f est injective et surjective) .
- L' application réciproque f^{-1} s'écrit de la façon suivante :

$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ y &\mapsto f^{-1}(y)=x \end{aligned}$ ou encore : $\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ x &\mapsto f^{-1}(x) \end{aligned}$ (on utilise le variable x au lieu de y .

- Relation entre f et f^{-1} est : $\left.\begin{matrix} x=f(x) \\ x\in E \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in F \end{cases}$.
- Pour démontrer que f est bijective , il suffit de démontrer que l'équation $x\in E : f(x)=y$ admet une solution unique x dans E pour tout y de F . (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F) .

c. Application :

- On considère l'application suivante : $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=3x-2 \end{matrix}$

1. Est-ce que f est bijective ?

2. Si oui déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

- On considère l'application suivante : $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=x^2-2x \end{matrix}$

1. Est-ce que f est surjective ?

- On considère l'application suivante : $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=x^2-2x \end{matrix}$

1. Est-ce que f est bijective ?

2. Si oui déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

III. COMPOSEE DES APPLICATIONS :

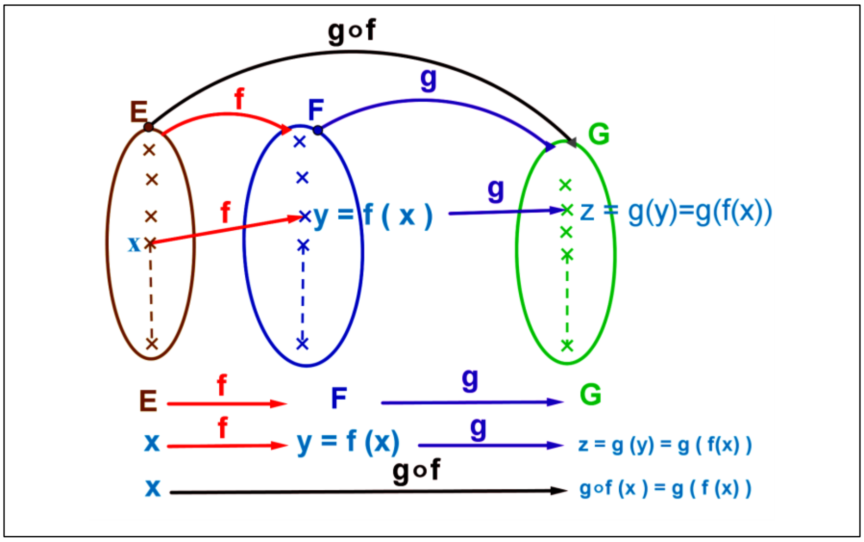
a. Définition :

On considère les deux applications : $f:E\to F$ et $g:F\to G$.

L'application $h:E\to G$ définie par : $\forall x\in E \;:\; h(x)=g(f(x))$ est appelée la composée de f et g dans cet ordre , et on note par : $g\circ f$.

Donc : $\begin{matrix} h=g\circ f:E\to G \\ x\mapsto h(x)=g\circ f(x)=g(f(x)) \end{matrix}$

b. Eclaircis:



c. Remarques :

- La composée de deux applications n'est pas toujours commutative : $f\circ g\neq g\circ f$ (en général)
- La composée des applications est associative $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ on peut écrire $f\circ g\circ h$

- f est une application bijective et f^{-1} l'application réciproque de f on a :

1. $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ donc $f \circ f^{-1} = Id_F$ (Id_F application identique sur F) .
2. $\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x$ donc $f^{-1} \circ f = Id_E$ (Id_E application identique sur E) .
3. Explication pour la dernière remarque :

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x \mapsto & & f(x) = y & \mapsto & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \end{array}}_{f^{-1} \circ f = Id_E}$$

donc $\forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x$ ou $f^{-1} \circ f = Id_E$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ y \mapsto & & f^{-1}(y) = x & \mapsto & f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}}_{f \circ f^{-1} = Id_F}$$

donc $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ ou $f \circ f^{-1} = Id_F$

d. Application :

- On considère les deux applications : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 4x^3 - 2x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \end{array}$

1. Déterminer : $g \circ f$ puis $f \circ g$.

- On considère l'application suivante : $\begin{array}{l} f : [0;2] \to [0;2] \\ x \mapsto f(x) = \left(\sqrt{2} - \sqrt{x}\right)^2 \end{array}$

1. Montrer que f est une application bijective .

2. Calculer $f \circ f(x)$ puis on déduit l'application réciproque f^{-1} de l'application f .