ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1)LES ENSEMBLES :

1-1) Activités :

Activité 1 : Soient les ensembles :

$E=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/ \tan x=\sqrt{3} : x\in\mathbb{R}\right\}$

$F=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/ x=\frac{\pi}{6}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$G=\left\{x\in\left]-\pi;2\pi\right[/ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{2}\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right\}$

Vérifier que : $S\subseteq E$ et $E\subseteq S$ et que $E=S$ et $E=G$

Vérifier que: $\frac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E

et que $E\neq F$

Activité 2 :

Soient $A=\left\{\frac{5n+8}{8n-1} / n\in\mathbb{N}\right\}$ et $B=\left\{\frac{2n+4}{2n-1} / n\in\mathbb{N}\right\}$

1- Est ce que : $\frac{17}{3}\in A$? $\frac{43}{25}\in B$? $\frac{42}{37}\in B$?

2- montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

1-2) VOCABULAIRES :

- Un ensemble E est une collection d'objets mathématiques. Les objets que l'ensemble Contient sont appelés éléments de E.
- Si x est un élément de E on dit que x appartient a E et on écrit : $x\in E$
- ∅ est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :$\{x\in E \text{ et } x\notin E\}$.
- Un ensemble peut être défini **en extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

Par exemple : L'ensemble V des voyelles de l'alphabet français en extension est :
V = {a, e, i, o, u, y}

- En compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

Par exemple : $E=\{k\in\mathbb{Z} / |3k+1|\leq 5\}$

Exemples :

1)L'ensemble des diviseurs de 3 en extension est : $D_3=\{1;3\}$

L'ensemble des diviseurs de 3 en compréhension est : $D_3=\{n\in\mathbb{N} / n/3\}$

2)L'ensemble A des entiers naturels dont les carrés sont inférieurs ou égaux à 40 :

$A=\{n\in\mathbb{N} / n^2\leq 40\}$ (en compréhension

$A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ (en extension)

Exercice1 :1)Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180}=\{n\in\mathbb{N} / n/180\}$

$A=\left\{n\in\mathbb{Z} / \frac{-5}{2}\leq n^2\leq\frac{3}{2}\right\}$;

$B=\{x\in\mathbb{R} / x^2+x+1=0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Solution : 1) $180=2^2\times 3^2\times 5$

$D_{180}=\{1;2;3;4;5;6;9;10;12;15;18;20;30;36;45;60;90;180\}$

$A=\{-1;0;1\}$

$x^2+x+1=0$ $\Delta=-3\prec 0$ donc : $B=\varnothing$

2) $P=\{2k / k\in\mathbb{N}\}$

Exercice2 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1=\{k\in\mathbb{Z} / |k+1|\leq 2\}$

$E_2=\{x\in\mathbb{Z} / k^2\leq 7\}$

$E_3=\{k\in\mathbb{Z} / 7\leq k^2\leq 35\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y)=32\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Solution : 1) $k\in E_1\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|k+1|\leq 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\leq k+1\leq 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-3\leq k\leq 1\Leftrightarrow$

Donc : $E_1=\{-3;-2;-1;0;1\}$

$k\in E_2\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et

$k^2\leq 7\Leftrightarrow |k|\leq\sqrt{7}\Leftrightarrow -\sqrt{7}\leq k\leq\sqrt{7}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $E_2=\{-2;-1;0;1;2\}$

$k\in E_3\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $7\leq k^2\leq 35$

$\Leftrightarrow\sqrt{7}\leq |k|\leq\sqrt{35}\Leftrightarrow |k|\in\{3;4;5\}\Leftrightarrow k\in\{-5;-4;-3;3;4;5\}$

Donc : $E_3=\{-5;-4;-3;3;4;5\}$

$E_4=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/(x+y)(x-y)=32\}$?

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité et

$x+y\geq x-y$ $32=2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$E_4=\{(6;2);(9;7)\}$

$E_5=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-y^2=15\}$?

$x^2-y^2=15\Leftrightarrow(x+y)(x-y)=15$

De même que : E_4 on a : les diviseurs de 15 sont 1 ;3 ;5 ;15 et $x+y\geq x-y$

On dresse un tableau :

$x-y$	1	3
$x+y$	15	5
x	8	4
y	7	1

2) $P=\{5k/k\in\mathbb{N}\}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $A=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

$B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solution : on sait que la fonction cos est périodique de période 2π et $\frac{n\pi}{6}=2\pi\Leftrightarrow n=12$

$n\in\{0;1;2;3;..;11\}$

$A=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{n\pi}{6}\right)/n\in[0;11]\right\}$

En tenant compte des relations :

$\cos(\pi+x)=\cos(\pi-x)=-\cos x$ on en deduit :

$A=\left\{\cos\left(\frac{6\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{11\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{16\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{21\pi}{30}\right)\right.$
$;\cos\left(\frac{26\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{31\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{36\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{41\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{46\pi}{30}\right)$
$\left.;\cos\left(\frac{51\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{56\pi}{30}\right);\cos\left(\frac{61\pi}{30}\right)\right\}$

De même pour sin on a : $B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{6}\right):n\in[0;11]\right\}$

En tenant compte des relations :

$\sin(\pi-x)=\sin x=-\sin(\pi+x)=-\sin(-x)$

on en deduit :

$B=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right);-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right\}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

Définition : On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$

$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

Exemple : $A=\{k\in\mathbb{Z}/|2k+1|\leq 3\}$ et $B = \{-2,-1,0,1\}$

Montrons que : $A = B$

Solution : $k\in A\Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$ et $|2k+1|\leq 3\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-3\leq 2k+1\leq 3\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-4\leq 2k\leq 2\Leftrightarrow$

$k\in\mathbb{Z}$ et $-2\leq k\leq 1\Leftrightarrow k\in\{-2;-1;0;1\}\Leftrightarrow k\in B$

Donc on a : $k\in A\Leftrightarrow k\in B$

Donc : $A = B$

Définition : Soient E et F deux ensembles quelconques. E est dit inclus dans F si tout élément de E est un élément de F.

On dit aussi que E est un sous-ensemble de F ou encore que E est une partie de. F On note $E \subset F$

$(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.

Exemple : Soit $E=\{0;1;2\}$ } déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$P(E)=\{\varnothing;\{0\};\{1\};\{2\};\{0;1\};\{0;2\};\{1;2\};E\}$

Définition : Soit E un ensemble, les partie de E, constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des partie de E et se note $P(E)$.

$P(E)) = \{X/ X \subset E\}$

Remarques : 1)A est une partie de E ($A \subset E$) si et seulement si A est un élément de $P(E)$

A ⊆ E ⇔ A ∈ $P(E)$

2) $\varnothing\in P(E)$ et $\emptyset \subset E$ 3) $E\in P(E)$ et E ⊂ E

Exercice4 : Ecrire en extension les ensembles suivants :

1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Solution :1) Il est aisé de voire que $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$

donc : $P(P(\varnothing))=\{\varnothing;\{\varnothing\}\}$

2) $P(P(\{a;b\}))$:

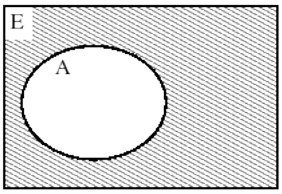
$P(\{a;b\})=\{\varnothing;\{a\};\{b\};\{a;b\}\}$ Donc :

$P(P(\{a,b\}))=\{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{a\}\};\{\{b\}\};\{\{a,b\}\};\{\varnothing;\{a\}\};\{\varnothing;\{b\}\};\{\varnothing;\{a,b\}\};\{\{a\};\{b\}\};$

$;\{\{a\};\{a,b\}\};\{\{b\};\{a,b\}\};\{\{a,b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{b\}\};\{\varnothing;\{a\};\{a,b\}\};\{\varnothing;\{b\};\{a,b\}\}\}$

3) Complémentaire d'un ensemble

complémentaire



Définition :

Soit A une partie de E, le complémentaire de A est l'ensemble constitué par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on le note $\overline{A}$ ou C_E^A.

$\overline{A}=\{x\in E\,/\,x\notin A\}$

Exemples : Si E un ensemble quelconque :

$\overline{E}=\emptyset$ et $\overline{\varnothing}=E$

$C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}=I$ (Ensembles des irrationnelles).

Exercice5 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a;b[$ l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[$ $a\prec b$

Solution : 1) le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels et se note $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

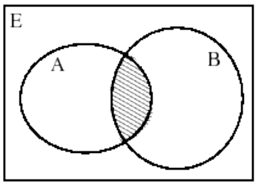
2) $\overline{[a;b[}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\notin[a;b[\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq b ou x\prec a\}$

$\overline{[a;b[}=]-\infty;a[\cup[b;+\infty[$

4) Intersection ; réunion, différence de deux ensembles.

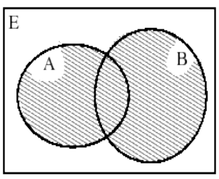
Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; l'intersection de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note par $A\cap B$. $A\cap B=\{x\in E/\ x\in A\ \textbf{et}\ x\in B\}$

intersection



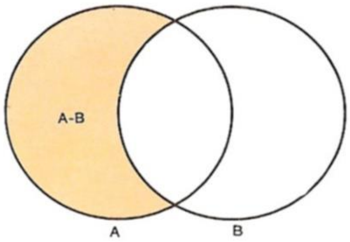
Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la réunion de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On le note par $A\cup B$.

réunion



$A\cup B=\{x\in E/\ x\in A\ \textbf{ou}\ x\in B\}$

Définition : Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; la différence de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B.



On le note par $A\backslash B$ ou $A-B$

$A\backslash B=\{x\in E/\ x\in A\ \textbf{et}\ x\notin B\}$

5) Propriétés

5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient E, un ensemble, A, B et C des parties de E.

$(A=B)\Leftrightarrow A\subset B$ et $B\subset A$

$A\subset B$ et $B\subset C\Rightarrow(A\subset C)$ la transitivité

5.2 Intersection et réunion

$A\cap A=A$ et $A\cup A=A$

Si $A\subset B$ alors $A\cap B=A$ et $A\cup B=B$

$A\cap B\subset A\subset A\cup B$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ L'associativité

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ L'associativité

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ la distributivité

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ la distributivité

5.3 Le complémentaire

$\overline{A}=E/A$ et $\overline{\overline{A}}=A$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ lois de Morgan

$(A\subset B)\Leftrightarrow(\overline{B}\subset\overline{A})$

5.4 La différence

$A-B=A-(A\cap B)$ $A-B=A\cap\overline{B}$

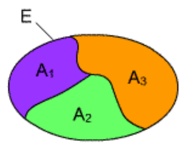
6) Notations généralisées.

Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$ une famille de parties d'un ensemble E, (qu'on peut noter $(A_i)_{1\leq i\leq n}$)

L'ensemble : $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

L'ensemble $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

Définition : Une famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de parties d'un ensemble E s'appelle une partition de l'ensemble E si elle vérifie :



$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=E$ et $i\neq j)\Rightarrow(Ai\cap Aj=\emptyset)$

on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

Exercice6:Soient les ensembles :

$A=\left\{\frac{\pi}{4}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ $B=\left\{\frac{\pi}{2}+2\frac{k\pi}{5}:k\in\mathbb{Z}\right\}$

Monter que : $A\cap B=\varnothing$

Solution : On suppose que : $A\cap B\neq\varnothing$

Donc : $\exists x_0\in\mathbb{R}\quad x_0\in A$ et $x_0\in B$

$\Leftrightarrow\exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2:\ x_0=\frac{\pi}{2}+2\frac{k_1\pi}{5}$ et $x_0=\frac{\pi}{4}+2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc $\Leftrightarrow\exists(k_1;k_2)\in\mathbb{Z}^2:\ \frac{\pi}{2}+2\frac{k_1\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+2\frac{k_2\pi}{5}$

Donc : $\frac{2}{5}(k_1-k_2)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow k_1-k_2=-\frac{5}{8}$ contradiction

avec le faite que $k_1-k_2\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{5}{8}\notin\mathbb{Z}$ Donc : $A\cap B=\varnothing$

Exercice7 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}\left(\overline{B-C}\right)\cup A=E\\ \left(\overline{C-D}\right)\cup A=E\end{cases}\Rightarrow(B-D)\subset A$

Solution : On suppose que :

$\left(\overline{B-C}\right)\cup A=E$ et $\left(\overline{C-D}\right)\cup A=E$

Remarquer que : $A\cup B=E\Rightarrow\overline{A}\subset B$

Donc : $B-C\subset A$ et $C-D\subset A$ cad

$B\cap\overline{C}\subset A$ et $C\cap\overline{D}\subset A$

Montrons que : $B-D\subset A$ cad $B\cap\overline{D}\subset A$?

Soit $x\in B\cap\overline{D}$

$x\in B\cap\overline{D}\Leftrightarrow x\in B$ et $x\in\overline{D}$

- Si $x\in C$ alors $x\in C\cap\overline{D}$ donc $x\in A$ car $C\cap\overline{D}\subset A$
- Si $x\notin C$ alors $x\in B\cap\overline{C}$ donc $x\in A$ car $B\cap\overline{C}\subset A$

Dans tous les cas : $(B-D)\subset A$

Exercice8 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Solution : On suppose que : $A\subset B\subset C$

On a : $A\subset B\subset C\Rightarrow A\subset B$ et $B\subset C$

$\Rightarrow A\cup B=B$ et $B\cap C=B\Rightarrow A\cup B=B\cap C$

On suppose que : $A\cup B=B\cap C$

On a : $A\cup B=B\cap C\Rightarrow A\cup B\subset B$ et $A\cup B\subset C$

$\Rightarrow A\subset B$ et $B\subset C$

$\Rightarrow A\subset B\subset C$

Donc : $A\subset B\subset C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C$

Exercice9 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que :

1) $A=(A\cap B\cap C)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

3) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Solution :1)

$(A\cap B\cap C)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)$

$=\left[(A\cap B)\cap\left(C\cup\overline{C}\right)\right]\cup\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\left(C\cup\overline{C}\right)\right]$

$=\left[(A\cap B)\cap E\right]\cup\left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cap E\right]=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$

$=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=A\cap E=A$

2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=\left[B\cup(A\cap C)\right]\cap(C\cup A)$

$=(B\cap(C\cup A))\cup((A\cap C)\cap(C\cup A))$

$=(B\cap C)\cup(B\cap A)\cup(A\cap C)$

3) Montrons que :

$\begin{cases}A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow A\cap B=A\cap C\\ A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\end{cases}$

$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Rightarrow\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A\cap\overline{C}}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{C}}$

$\Rightarrow\overline{A}\cup B=\overline{A}\cup C\Rightarrow A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)=A\cap\left(\overline{A}\cup C\right)$

$\Rightarrow\left(A\cap\overline{A}\right)\cup(A\cap B)=\left(A\cap\overline{A}\right)\cup(A\cap C)$

$\Rightarrow A\cap B=A\cap C$

Inversement :

$A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}\Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

D'après l'implication directe

Donc : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Leftrightarrow A\cap B=A\cap C$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\ A\cap B\subset A\cap C\end{cases}\Rightarrow B\subset C$

Solution : On suppose que :

$\begin{cases}A\cup B\subset A\cup C\\ A\cap B\subset A\cap C\end{cases}$ Montrons que :

$(\forall x\in E)(x\in B\Rightarrow x\in C)$?

$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cup C\Rightarrow x\in A$ ou $x\in C$

- Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$ donc $x\in A\cap C$ car $A\cap B\subset A\cap C$ donc $B\subset C$
- Si $x\notin A$ et puisque $x\in C$ ou $x\in A$ est vraie alors $B\subset C$

Conclusion : $(\forall x\in E)(x\in B\Rightarrow x\in C)$

Donc $B\subset C$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble

Qu'on note : $A\Delta B$ tel que : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

1)Monter que : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

2)Monter que : $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

3)Monter que : $\forall C \in P(E)$: $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$

Solution : 1)

$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$$

$$= \left[(A\cap\overline{B})\cup B\right]\cap\left[(A\cap\overline{B})\cup\overline{A}\right]$$

$$= (A\cup B)\cap(B\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})$$

$$= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(\overline{A\cap B})$$

$$= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A\cup B)-(A\cap B)$$

2)Monter que :

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = (\overline{A}-\overline{B})\cup(\overline{B}-\overline{A}) = (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)$$

$$= (A-B)\cup(B-A) = A\Delta B$$

3)soit $C \in P(E)$

- Si on a : $B = C$ alors $A\Delta B = A\Delta C$
- Supposons que : $A\Delta B = A\Delta C$ et montrons que $B = C$?

✓ Soit $x \in B$ montrons que $x \in C$?

Si $x \in A$:

$(x \in A$ et $x \in B) \Rightarrow x \in A\cap B \Rightarrow x \notin A\Delta B \Rightarrow x \notin A\Delta C$

(Car $A\Delta B = A\Delta C$)

$$\Rightarrow x \in A\cap C \Rightarrow x \in C$$

Donc $A\cap B \subset C$ **(1)**

Si $x \notin A$:

$(x \notin A$ et $x \in B) \Rightarrow x \in B-A \Rightarrow x \in A\Delta B \Rightarrow x \in A\Delta C$

(Car $A\Delta B = A\Delta C$)

$$\Rightarrow x \in C-A \Rightarrow x \in C$$

Donc $\overline{A}\cap B \subset C$ **(2)**

De **(1) et (2)** en deduit que : $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B) \subset C$

Et puisque : $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B) = (A\cup\overline{A})\cap B = E\cap B = B$

Alors $B \subset C$

De même on montre que : $C \subset B$

Donc : $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$

Finalement : $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$

7) Produit cartésien

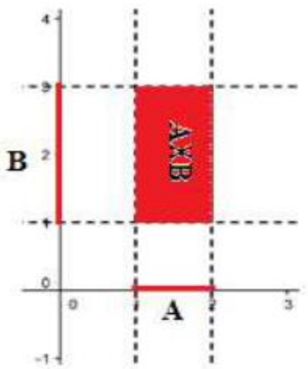
Définition : Soient A et B deux ensembles ; le produit cartésien de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, On le note par $A \times B$.

$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$ Le carrée cartésien d'un ensemble A

Est l'ensemble $A \times A$ noté A^2

Exemples :

$A = [1,2]$; $B = [1,3]$



Exercice12 :Soit l'ensemble :

$$E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$$

1) a)vérifier que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x-y)(x+2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E \cap \mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E = \left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t}; \dfrac{-t^2-5}{3t}\right) / t \in \mathbb{R}^*\right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$A = \{0;1;4;9;16;...\}$ et $B = \left\{-1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; ...\right\}$

$C = \{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Solution : 1) a)

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+2y) = x^2 + 2xy - xy - 2y^2$$

$$= x^2 + xy - 2y^2$$

b) $(x;y) \in E\cap\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x;y) \in E$ et $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = -5$ et $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} x-y=-5 \\ x+2y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=5 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+2y=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$

Donc : $E\cap\mathbb{Z}^2 = \{(-3;2);(3;-2);(1;2);(-1;-2)\}$

c) $(x;y) \in E \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=t \\ x+2y=\dfrac{-5}{t} \end{cases} : t \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{2t^2-5}{3t} \text{ et } y = \frac{-t^2-5}{3t}\right) : t \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t}; \frac{-t^2-5}{3t}\right) / t \in \mathbb{R}^*\right\}$$

Donc : $E = \left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t}; \dfrac{-t^2-5}{3t}\right) / t \in \mathbb{R}^*\right\}$

4) $A = \{k^2; k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \left\{\dfrac{(-1)^k}{k}; k \in \mathbb{N}^*\right\}$

$C=\{1+3n;n\in\mathbb{Z}\}$

Exercice13 :soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1)déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2)déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3)déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

Solution : 1) le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$ se note : $C_{E\times F}^{A\times B}$ ou $\overline{A\times B}$

$(x;y)\in\overline{A\times F}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times F\Leftrightarrow x\notin A ou y\notin F$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A} ou y\in\overline{F}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ ou $y\notin F$

$\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ Car : $y\notin F$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{A\times F}=\overline{A}\times F$

$(x;y)\in\overline{E\times B}\Leftrightarrow(x;y)\notin E\times B\Leftrightarrow x\notin E ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{E} ou y\in\overline{B}\Leftrightarrow(x;y)\in E\times\overline{B}$ ou $x\notin E$

$\Leftrightarrow(x;y)\in E\times\overline{B}$ Car : $x\notin E$ donne l'ensemble vide

Donc : $\overline{E\times B}=E\times\overline{B}$

3) $(x;y)\in\overline{A\times B}\Leftrightarrow(x;y)\notin A\times B\Leftrightarrow x\notin A ou y\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A} ou y\in\overline{B}\Leftrightarrow(x;y)\in\overline{A}\times F$ ou $(x;y)\in E\times\overline{B}$

$\Leftrightarrow(x;y)\in(\overline{A}\times F)\cup(E\times\overline{B})$

Donc : $\overline{A\times B}=(\overline{A}\times F)\cup(E\times\overline{B})$

Exercice14 : soient l'ensemble :

$L=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\le1\}$

Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Solution : On suppose: qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

On a : $(1;0)\in L$ et $(0;1)\in L$

Donc : $1\in A$ et $1\in B$ car $L=A\times B$

Donc : $(1;1)\in A\times B$ cad $(1;1)\in L$

Donc contradiction car : $1^2+1^2\succ1$

Conclusion il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Exercice15 : Soient les ensembles :

$$H=\left\{y\in\mathbb{R}/y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$G=\left\{y\in\mathbb{R}/y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}\right\}$$

1- montrer que : $H=]0,1]$.

a- Considérer un élément $y_0\in H$ et montrer que $y_0\in]0,1]$

b- Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrer que $y_0\in H$

2- Monter que $G\subset H$

3- Est-ce que $G=H$?

Solution :

1- a- soit un élément $y_0\in H$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$$y_0\in H\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$$

On a $x_0^2\ge0\Rightarrow x_0^2+1\ge1\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}\ge1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\le1\Rightarrow$

$y_0\in]0,1]$ Donc : $H\subset]0;1]$ **(1)**

b- Considérer un élément $y_0\in]0,1]$ et montrons que $y_0\in H$?

$$y_0\in]0;1]\qquad\exists?x_0\in\mathbb{R}/y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$$

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}\Leftrightarrow y_0^2=\frac{1}{x_0^2+1}\Leftrightarrow x_0^2=\frac{1}{y_0^2}-1$$

Or : $y_0\in]0;1]$ donc $0\prec y_0\le1$ donc $\frac{1}{y_0^2}-1\ge0$

Donc : il suffit de prendre : $x_0=\sqrt{\frac{1}{y_0^2}-1}$ Donc : $y_0\in H$

Donc : $]0;1]\subset H$ **(2)**

De : **(1) et (2)** en deduit que **:** $H=]0;1]$

2- montrons que $G\subset H$??

Montrons que : $G\subset]0;1]$?

soit un élément $y_0\in G$ montrons que $y_0\in]0,1]$?

$$y_0\in G\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/y_0=\frac{1}{1+\sqrt{x_0^2+1}}$$

On a $x_0^2\ge0\Rightarrow x_0^2+1\ge1$

$$\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}\ge1\Rightarrow\sqrt{x_0^2+1}+1\ge2\Rightarrow0\prec\frac{1}{1+\sqrt{x_0^2+1}}\le\frac{1}{2}\le1$$

Donc : $y_0\in]0,1]$ Donc : $G\subset H$

3)supposons : $G=H$

On a $1\in H\Rightarrow1\in G$

$$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/1=\frac{1}{1+\sqrt{x_0^2+1}}$$

$$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/1+\sqrt{x_0^2+1}=1\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/\sqrt{x_0^2+1}=0$$

$\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}/x_0^2=-1$ absurde donc : $H\neq G$

Exercice16 : on considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\} \text{ et } B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$$

1)a) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\}\right)\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1)b) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

2) déterminer : A ; B ; $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Solution : 1) a) il est aisé de voir que :

$$\left(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\}\right)\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$$

1) b) il est aisé aussi de voir que

$$\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)2x-1+\frac{9}{2x-1}=+\frac{(2x-1)^2+9}{2x-1}=\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}$$

2) détermination de : A ?

On a : $A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et

$\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)2x-1\in\mathbb{Z}$ et $\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

En deduit que : $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right)$; $x\in A\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x-1+\frac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{9}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1 divise 9$

$\Leftrightarrow 2x-1\in\{-9;-3;-1;1;3;9\}\Leftrightarrow 2x\in\{-8;-2;0;2;4;10\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-4;-1;0;1;2;5\}$ donc : $A=\{-4;-1;0;1;2;5\}$

détermination de : B ?

soit $x\in\mathbb{Z}$ de façon analogue nous pouvons écrire :

$x\in B\Leftrightarrow x\neq 5 et x-5 divise 15$

$\Leftrightarrow x-5\in\{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$

$\Leftrightarrow x\in\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$ donc :

$B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}$

détermination de : $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$?

$A-B=\{-4;-1;0;1;2;5\}-\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}=\{-4;-1;1;5\}$

$A-B=\{-10;0;2;4;6;8;10;20\}-\{-4;-1;0;1;2;5\}=\{-10;4;6;8;10;20\}$

$A\Delta B=(A-B)\cup(A-B)=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

3)Résolution dans $P(\mathbb{Z})$ de l'équation : $A\Delta X=B$

On trouve : $X=\{-10;4;6;8;10;20;-4;-1;1;5\}$

Exercice17 :Soient les ensembles :

$E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2-xy-2y^2=0\right\}$

$F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x+y=0\right\}$

1) montrer que : $F\subset E$

2)déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

$B=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\right\}$

a) montrer que : $H=A\cup B$

b) déterminer : $H\cap F$

Solution : 1) montrons que : $F\subset E$?

On a : $(x;y)\in F\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x^2-xy-2y^2=y^2+y^2-2y^2=0\Rightarrow(x;y)\in E$

Donc : $F\subset E$

2) $(1;y)\in E\Leftrightarrow 1-y-2y^2=0\Leftrightarrow(1+y)(1-2y)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ ou $y=\frac{1}{2}$

Donc : $\left(1;\frac{1}{2}\right)\in E$ ou $\left(1;\frac{1}{2}\right)\notin F$

Donc : $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2/\ (x;y)\notin F$ et $(x;y)\in E$

Donc : $E\not\subset F$

3) $(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0\Leftrightarrow x^2-2xy+xy-2y^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2xy-2y^2=0\Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0$

$\Leftrightarrow(x+y)(x-2y)=0\Leftrightarrow x+y=0$ ou $x-2y=0$

$\Leftrightarrow(x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Avec : $G=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x-2y=0\right\}$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ $(x;y)\in E\Leftrightarrow(x;y)\in F$ ou $(x;y)\in G$

Donc : $E=F\cup G$

4) a)$(x;y)\in H\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+2x=0$

$\Leftrightarrow y^2-2y(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^2+2x=0$

$\Leftrightarrow\left[y-(x+1)\right]^2=(x+1)^2-2x\Leftrightarrow\left[y-(x+1)\right]^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow y=x+1+\sqrt{x^2+1}$ ou $\Leftrightarrow y=x+1-\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow(x;y)\in A$ ou $(x;y)\in B$ Donc : $H=A\cup B$

4) b)$(x;y)\in H\cap F\Leftrightarrow(x;y)\in H$ ou $(x;y)\in F$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+2x-2y=0$ et $x=-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x^2+2x+2x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+4)=0 \\ x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 ou x=-\dfrac{4}{3} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0 et y=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{3} et y=\frac{4}{3}$$

Donc : $(x;y)\in H\cap F \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$

$$H\cap F=\left\{(0;0);\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\right\}$$

Exercice18 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a)déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b)résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) on suppose que $C\subset A\subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases}$

Solution : 1)si on a : $A\cup X=B$ alors : $X\subset B$ et $A\subset B$

Donc une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$ est $A\subset B$

b)résolution dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

$A\cup X=B \Rightarrow (A-B)\cap(A\cup X)=(B-A)\cap B$

$\Leftrightarrow [(B-A)\cap A]\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow \varnothing\cup[(B-A)\cap X]=B-A$

$\Leftrightarrow (B-A)\cap X=B-A \Leftrightarrow B-A\subset X \Rightarrow B-A\subset X\subset B$

Inversement :

$\forall X\in P(E)$ tel que : $B-C\subset X\subset B$ est solution de l'équation : $A\cup X=B$

Et on a : $(B-A)\cup A=B \quad (B-A)\cap A=\varnothing$

Donc : $A\cup X=B \Leftrightarrow X=(B-A)\cup Y \quad Y\in P(E)$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\{(B-A)\cup Y;Y\in P(E)\}$

2) $C\subset A\subset B$

$$\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=(B-A)\cup Y / Y\in P(E) \\ A\cap[(B-A)\cup Y]=C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=(B-A)\cup Y / Y\in P(E) \\ [A\cap(B-A)]\cup[A\cap Y]=C \end{cases}$$

et puisque $A\cap(B-A)=\varnothing$ et $A\cap Y=Y$ car $Y\subset A$

alors : $X=(B-A)\cup C$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

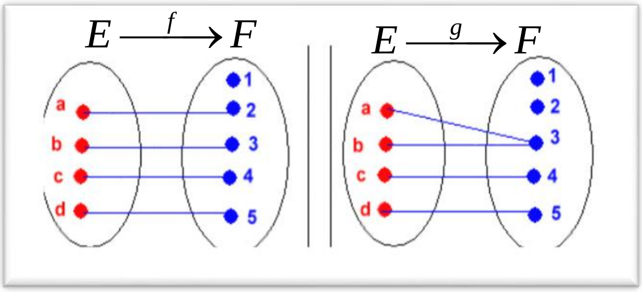
$S=\{(B-A)\cup C\}$

II) LES APPLICATIONS

1) Activités : Activité 1 :

Considérons les ensembles :

$E=\{a,b,c,d\}$ et $F=\{1,2,3,4,5\}$, f, g sont des relations de E dans F.



Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

Activité 2 : Soit la fonction f définie par :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

$\overline{A}=\{x\in E / x\notin A\}$

1-Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

(P) $(a\neq b)\Rightarrow (f(a)\neq f(b))$.

3-Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f(x)\in\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$

4- Montrer que $(\forall y\in\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $(\exists x\in\mathbb{R})(f(x)=y)$

2) Définitions et vocabulaires

2.1 Application Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F.

Vocabulaire :

$f:E\to F$

$x\mapsto y=f(x)$

1)L'ensemble E s'appelle ensemble de départ de l'application f.

2)L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée de l'application f.

3)$y=f(x)$ s'appelle l'image de x par l'application f.

4) x s'appelle l'antécédent de y par l'application f.

Exemple1 : $\begin{matrix} f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x+1}{x} \end{matrix}$ f est une l'application de $\mathbb{R}-\{0\}$ dans $\mathbb{R}$

Exemple2 : $\begin{matrix} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x+1}{x} \end{matrix}$ g n'est pas une l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car 0 n'admet pas d'images

2.2 Egalité de deux applications

Activité :

Soient les deux applications suivantes :

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $n\mapsto(-1)^n\times n$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $n\mapsto\begin{cases}n.\text{si}.n.pair\\ -n.si.n.impair\end{cases}$

Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})(f(n)=g(n))$

Définition : On dit que deux applications f et g sont égales si :

1) Elles ont le même ensemble de départ E
2) Elles ont le même ensemble d'arrivée F
3) $(\forall x\in E)(f(x)=g(x))$.

Exemple1 : Les 3 applications :

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2$ et $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2$

Sont différentes.

Exemple2 : soit les 2 applications :

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto(-1)^n$ et $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$

que deux applications f et g ont le même ensemble de départ $\mathbb{Z}$ et le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$

Et on a :

$$g(n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n=f(n)$$

Donc : $f=g$

Définition :(injection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est injective de E dans F si :

$$\forall(x_1;x_2)\in E^2\quad x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

Par contraposition on peut dire que :

(f est injective) $\Leftrightarrow$ $\forall(x_1;x_2)\in E^2$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x+\sqrt{x}$

f est-elle injective ?

Solution : soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1}=x_2+\sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\right)=0$$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$ ou $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1=0$

Or $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+1\neq0\Rightarrow\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0$

$\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ donc f est injective

Exemple2 : soit l'application : $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-1$

g est-elle injective ?

Solution : on a : $g(1)=g(-1)=0$ mais $1\neq-1$

Donc g n'est pas injective

Exercice19 :1) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{3x+1}{x-2}$

Montrer que f est injective

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2+4$ $\quad g$ est-elle injective ?

2) $h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}$, $n\mapsto1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3
2- Montrer que $n>m\Rightarrow h(n)>h(m)$
3- En déduire que h est injective.

Définition :(surjection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est surjective de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E.

$(\forall\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{F})(\exists\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution dans E.

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to]-\infty;3]$, $x\mapsto3-x^2$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$.

Solution : soient $y\in]-\infty;3]$

Resolvons l'équation: $f(x)=y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow3-x^2=y\Leftrightarrow x^2=3-y$$

Or $y\in]-\infty;3]$ donc $y\leq3$ donc $0\leq3-y$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$ car $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $(\forall\boldsymbol{y}\in]-\infty;3])(\exists\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^+)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Donc :f est surjective

Exemple2 : soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto3-x^2$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : on remarque que :

$\forall x\in\mathbb{R}^+$ on a : $f(x)\leq3$

Donc par exemple l'équation: $f(x)=4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ donc : f est non surjective

Exercice 20: 1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$

a- f est-elle surjective de $\mathbb{R}/\{2\}$ vers $\mathbb{R}$.
b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

a- Montrer que la fonction g est surjective.
b- g est-elle injective ?

3) $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}\cap[1;+\infty[\\ n\mapsto 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n} \end{array}$

h est-elle surjective ?

Définition :(bijection) Soit f une application de E dans F, on dit que f est une bijection de E dans F si elle injective et surjective

Propriété : Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :
$(\forall \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{F})\ (\exists\,!\ \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{E})\ (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$
Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans E.

Exemple1 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2-5x \end{array}$

f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. ?

Solution : soient $y\in\mathbb{R}$

Resolvons l'équation : $f(x)=y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2-5x=y \Leftrightarrow x=\frac{2-y}{5}$$

Puisque l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ $(\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R})$
Donc :f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice21 :

$\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

1- Montrer que f est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.
2- Soit y un élément de $[2,+\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1,+\infty[$ tel que $f(x)=y$
L'application qui lie l'élément y de $[2,+\infty[$, à l'élément unique x de $[1,+\infty[$ et solution de l'équation $f(x)=y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection $\boldsymbol{f}$ et se note : $f-1$

Définition : Si f est une bijection de E dans F; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution de l'équation $f(x)=y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}. f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ x\in E \end{cases}$$

Exemple : soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{2}{x-1} \end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Solution soient $y\in]0;+\infty[$

Resolvons l'équation : $f(x)=y$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-1}=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{2}{y} \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{y}+1$$

$(\forall\ y\in]0;+\infty[)\ (\exists\,!\ \boldsymbol{x}\in\ ]1;+\infty[)\ (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$

Donc :f est une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$

$$\begin{cases} f(x)=y \\ x\in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in]0;+\infty[\end{cases}$$

$\forall y\in]0;+\infty[\quad f^{-1}(y)=\dfrac{2}{y}+1$ Donc : $\begin{array}{l} f^{-1}:]0;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{2}{x}+1 \end{array}$

Exercice 22: Déterminer la fonction réciproque de la fonction $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

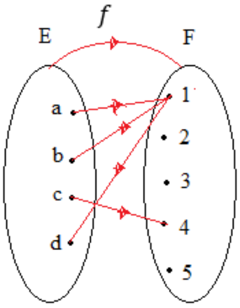
Exercice 23 : Soit la fonction g définie par :
$\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

3.1 Activité /Activité 1 :

Soit f dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre



1- Déterminer les images directes des ensemble $\{a, b, c\}$ Et $\{b,c\}$ et E

2- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles : {1} ; {1,3} ; {2,3} et {1,4}

Activité 2 : Soit $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x^2-x \end{array}$

1- Montrer que $\forall x\in[-1;1]\quad f(x)\in\left[\frac{-3}{16};3\right]$

2- Montrer que : $\forall y\in\left[\frac{-3}{16};3\right]\ \exists x\in[-1;1]\,/\,(f(x)=y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1;1]$ par l'application f est l'intervalle $\left[\frac{-3}{16};3\right]$ et on écrit :

$f([-1;1])=\left[\frac{-3}{16};3\right]$

Activité 3 : Soit $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{array}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient $h((x,y)) = 1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M\ (x, y)$ qui vérifient $h\ ((x, y)) = 1$.

Définition : Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \in F/x \in A\}$

L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble $f^{-1}(B)= \{x \in E/\ f(x) \in B\}$

Remarques : 1) Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

$$f(A)=B\Leftrightarrow\begin{cases} f(A)\subset B \\ B\subset f(A)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (\forall x\in A)(f(x)\in B) \\ (\forall y\in B)(\exists x\in A)(f(x)=y)\end{cases}$$

2) $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ mais si $f^{-1}(B)= \emptyset$ on ne peut pas dire que $B = \emptyset$ *exemple :*

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x^2+1 \end{array}$ on a : $f^{-1}(\mathbb{R}^-)= \emptyset$

3) Pour parler de l'image réciproque d'un élément par une fonction, il faut que f soit bijective

Mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application f

Propriété : Soit f une application de E dans F.

f est surjective de E dans F ,si et seulement si $f(E) = F$.

Preuve : On a : f une application de E dans F donc : $f(E) \subset F$;si de plus f est surjective alors : $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$ et donc $F \subset f(E)$.

D'où $f(E) = F$

Réciproquement si $f(E) = F$ alors $F \subset f(E)$ et par suite : $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$ donc f est surjective.

Exemple1 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x-1}{x+1} \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$

2)Déterminer : $f(K)$ avec $K=]-\infty;-1[$

Solution : 1) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$3-\frac{4}{x+1}=\frac{3x+3-4}{x+1}=\frac{3x-1}{x+1}=f(x)$$

2) $x\in K\Leftrightarrow x\prec -1\Leftrightarrow x+1\prec 0\Leftrightarrow -\dfrac{4}{x+1}\succ 0$

$\Leftrightarrow 3-\dfrac{4}{x+1}\succ 3\Leftrightarrow g(x)\in]3;+\infty[$ donc $f(K)=]3;+\infty[$

Exemple2 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B=[-1;4]$

Solution :

$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}/-1\le f(x)\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/-1\le x^2\le 4\}=\{x\in\mathbb{R}/\,0\le x^2\le 4\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/-2\le x\le 2\}=[-2;2]$ donc $f^{-1}(B)=[-2;2]$

Exemple3 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \cos x \end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D=]1;2]$

Solution :

$f^{-1}(D)=\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)\in D\}=\{x\in\mathbb{R}/1\prec f(x)\le 2\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/1\prec\cos x\le 2\}=\varnothing$ car

$\forall x\in\mathbb{R}/-1\le\cos x\le 1$ donc $f^{-1}(D)=\varnothing$

Exercice 24:

Soit g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3}{1+x^2}$ déterminer $f-1([1,2])$ $f^{-1}\left([1;2]\right)$

4) Restriction ; Prolongement d'une application

Activité 1: Soit l'application :

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3\left|1-x^2\right|+x$ Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Activité 2 : Soit l'application

$g:\mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-1}$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g, définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition : Soit f une application de E dans F

Soit A une partie de E, l'application définie de A vers F, qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble $\boldsymbol{A}$.

Soit Γ un ensemble tel que $E \subset \Gamma$, l'application définie de Γ vers F, qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle un prolongement de $\boldsymbol{f}$ sur l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$.

Exemple1 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2-2x+1} \end{array}$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Solution : $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

Si $x \in]-\infty;1]$ alors : $f(x)=-(x-1)=-x+1$

Donc : la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$ est

l'application $\begin{array}{l} g:]-\infty;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x+1 \end{array}$

Exemple2 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x-|x|+3 \end{array}$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Solution : $f(x)=2x-|x|+3$

Si $x \in]-\infty;0]$ alors : $f(x)=2x+x+3=3x+3$

Donc : la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$ est

l'application $\begin{array}{l} g:]-\infty;0] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+3 \end{array}$

Exemple3 : soit les applications :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2|x|-x \end{array}$

Est-ce que g est un prolongement de $\boldsymbol{f}$?

Solution : $g(x)=2|x|-x=x$ Si $x \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

Donc : g est un prolongement de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$

7) La partie entière d'un réel.

Théorème : On admet la proposition suivante :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! k \in \mathbb{Z})(k \leq x < k+1)$.

Définition : L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent

S'appelle la partie entière du réel $\boldsymbol{x}$

on le note $[x]$ ou $E(x)$.

L'application qui lie chaque élément x de $\mathbb{R}$ par $E(x)$ dans $\mathbb{Z}$ s'appelle l'application partie entière.

Exemple : $E\left(\sqrt{2}\right)=1$ $E(\sqrt{2}) = 1$; $E(\pi) = 3$

$E(-\pi) = -4$ $(\forall n \in \mathbb{N}*)\left(E\left(\dfrac{1}{n}\right)=0\right)$

et $(\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$

Exercices25 : 1) Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m + x) = m + E(x))$.

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$E(x + y) \neq E(x) + E(y)$

3) Soit l'application $\begin{array}{l} h:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto E(3x+1)+x \end{array}$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{3}\right[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

8) Composition de deux applications.

Activité : Soient les deux applications :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x-1} \end{array}$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

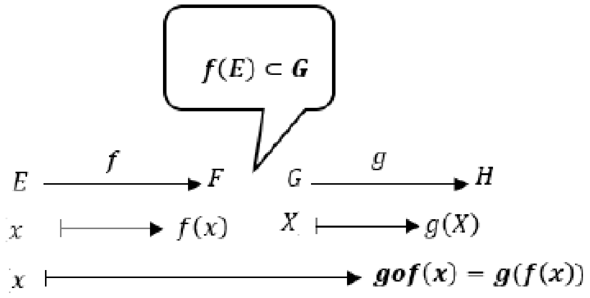
3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application fog et gof.

Définition : Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $\boldsymbol{f(E) \subset G}$, l'application h définie de E vers H par pour tout x dans E, $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note gof.

$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})$ $(\boldsymbol{gof(x)} = \boldsymbol{g(f(x)})$

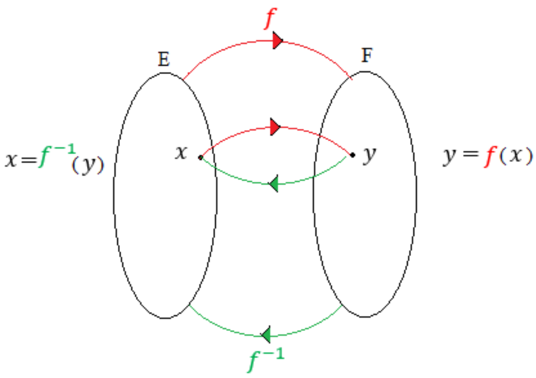
On peut représenter la composition par :



Propriété :
1) La composition de deux applications injectives est une application injective
2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective
3)La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propriété : 1)La composition des applications est associative : $(fog)oh = fo(goh)$
2) La composition des applications n'est pas commutative : $fog \neq gof$

Propriété :
Si f est une bijection de E dans F et $f{-}1$ sa bijection réciproque :
1) $(\forall x \in E)$ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ $f^{-1} \circ f$ s'appelle l'identité de $\boldsymbol{E}$ et s note Id_E
2° $(\forall x \in F)$ $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $f \circ f^{-1}$ s'appelle l'identité de $\boldsymbol{F}$ et s note Id_F
Si $E = F$ alors : $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$



Exemple : soit l'application : $h : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h = g \circ f$
2)a) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque
b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque
c) en déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1) $h(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $h = g \circ f$ avec :

$f : \mathbb{R}^+ \to \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $g : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ $x \mapsto x^2$

2)a) f est une bijection en effet :
soient $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
Resolvons l'équation : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y-1}{2}$$

Or $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc $2y - 1 \geq 0$ donc $x = \left(\frac{2y-1}{2}\right)^2$

donc $x = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ Puisque l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution

donc :f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ .et

$f^{-1} : \left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

2)b) g est une bijection de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ vers $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ en et

: $g^{-1} : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
$x \mapsto \sqrt{x}$

c) h est la composée de deux bijections f et g
donc h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Et $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Donc : la bijection réciproque h^{-1} de h est

$h^{-1} : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2$

Exercice26 : soient les applications :

$f :]1;+\infty[\to]1;+\infty[$ $\quad$ et $\quad$ $g :]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x \mapsto 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ $\quad$ $x \mapsto \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$

1)Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2)Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a)vérifier que : $\forall x \in]1;+\infty[: g(x) = (f(x))^2$

3)b)en déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Solution : 1)

$f([2;4[) = \{f(x) / x \in [2;4[\} = \{f(x) / 2 \le x \prec 4\}$

$= \{f(x) / \sqrt{2}-1 \le \sqrt{x}-1 \prec 1\} = \left\{f(x) / 1 \prec \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$

$= \{f(x) / 3 \prec f(x) \le 3+2\sqrt{2}\}$

Donc : $f([2;4[) =]3;3+2\sqrt{2}]$

$g^{-1}(\{9\}) = \{x \in]1;+\infty[/ g(x) \in \{9\}\} = \{x \in]1;+\infty[/ g(x) = 9\}$

$g^{-1}(\{9\}) = \{x \succ 1 / \sqrt{x} = 2\} = \{4\}$

2)montrons que f est injective ?

soient $x_1 \in]1;+\infty[$ et $x_2 \in]1;+\infty[$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1+\dfrac{2}{\sqrt{x_1}-1} = 1+\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-1}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1}-1 = \sqrt{x_2}-1 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

donc f est injective

Montrons que f est surjective ?

$\forall y \in]1;+\infty[\; y = f(x) \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2$

Et on a :

$\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2 - 1 = \left(\dfrac{y+1}{y-1}-1\right)\left(\dfrac{y+1}{y-1}+1\right) = \dfrac{4y}{(y-1)^2}$

Donc : $\forall y \in]1;+\infty[\; \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2 \succ 1$ donc :

$(\forall y \in]1;+\infty[)(\exists x \in]1;+\infty[) / \; x = \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^2$ et $y = f(x)$

Donc : que f est surjective de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

Détermination de sa bijection réciproque ?

$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ y \in]1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

Donc : $f^{-1} :]1;+\infty[\to]1;+\infty[$

$x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

3)a)vérifier que : $\forall x \in]1;+\infty[$:

$(f(x))^2 = \left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\right)^2 = g(x)$

3)b)on a : $g = h \circ f$ avec $h(x) = x^2 \; \forall x \in]1;+\infty[$:

Et puisque les applications f et h sont des bijections de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ alors $g = h \circ f$ est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$

et on a :

$g^{-1}(x) = (h \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ h^{-1}(x)$

$= f^{-1}(h^{-1}(x)) = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2 = g(x)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien