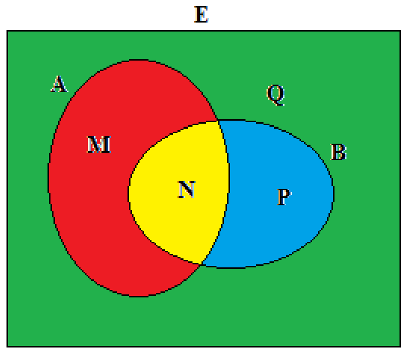
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

I) LES ENSEMBLES

1) Activité et définition

1.1 Activités :

Activité 1 :



Le diagramme ci-contre s'appelle le diagramme de Venn.

On a : $M = \{x \in E / \, x \in A \; et \; x \notin B\}$

1- Définir de la même façon les ensembles N, P et Qen fonction de A et B.

2- Déterminer les ensembles A et B en fonction des ensembles M, N, P et Q

3- Que pouvez-vous dire des ensembles P et M.

Activité 2 :

Soient les ensembles : $H = \{y \in \mathbb{R} / \; y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \; ; où \; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{y \in \mathbb{R} / \; y = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} \; ; où \; x \in \mathbb{R}\}$

1-On se propose de montrer que : $H =]0,1]$.

a- Considérer un élément $y_0 \in H$ et montrer que $y_0 \in]0,1]$

b- Considérer un élément $y_0 \in]0,1]$ et montrer que $y_0 \in H$

2- Monter que $G \subset H$

3- Est-ce que $G = H$?

Activité 3 :

Soient $A = \{\frac{5n+8}{8n-1} / \; n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{\frac{2n+4}{2n+1} / \; n \in \mathbb{N}\}$

1- Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? ; $\frac{43}{25} \in B$? ; $\frac{38}{47} \in B$?

2- Déterminer les éléments communs entre A et B.

3- Déterminer tous les entiers naturels qui appartiennent à B.

1.2 Vocabulaires

- Un ensemble E est une **collection** ou un **groupement** d'objets distincts ; ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.
- Si x est élément d'un ensemble E, on dit que x **appartient** à E et on écrit : $x \in E$,
- $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite :$\{x \in E \; et \; x \notin E\}$.
- Un ensemble peut être défini
  - **En extension**, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

    Par exemple : $E = \{a, b, n, p\}$
  - **En compréhension** c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

    Par exemple : $E = \{x \in \mathbb{Z} / \; |3k + 1| \leq 5 \}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des partie d'un ensemble

Définition :

On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$

$$(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

Exemple :

$A = \{k \in \mathbb{Z}/|2k+1| \leq 3\}$ $B = \{-2,-1,0,1\}$; $A = B$

Définition :

Soient E et F deux ensembles quelconques. E est dit **inclus** dans F si tout élément de E est un élément de F. On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F ou encore que E est une **partie** de . On note $E \subset F$

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F).$$

Activité :

Soit $E = \{1,2,3\}$ déterminer tous les ensembles inclus dans E.

Définition :

Soit E un ensemble, les partie de E, constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des partie de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\}$$

Remarque :

A est une partie de E ($A \subset E$) si et seulement si A est un élément de $\mathcal{P}(E)$

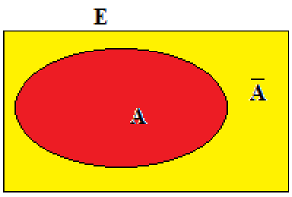
Exercice : Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})$

3) Complémentaire d'un ensemble

Définition :

Soit A une partie de E, le complémentaire de A est l'ensemble constitué par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on le note $\bar{A}$ ou $C_E A$.

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$



Exemples :

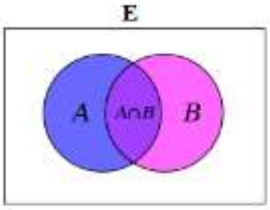
- Si E un ensemble quelconque : $\bar{E} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$
- $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ (ensembles des irrationnelles).

4) Intersection ; réunion , différence de deux ensembles.

Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; **l'intersection** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note par $A \cap B$.

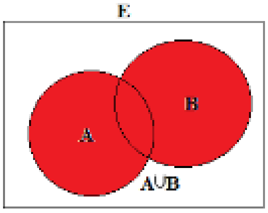
$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \textbf{ et } x \in B\}$$



Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; **la réunion** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B. On le note par $A \cup B$.

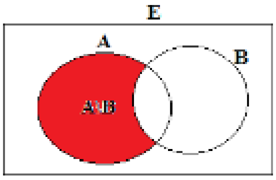
$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$



Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; **la différence** de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B. On le note par $A \backslash B$ ou $A - B$

$$A \backslash B = \{x \in E / x \in A \textbf{ et } x \notin B\}$$



5) Propriétés

5.1 Propriétés d'inclusion.

Soient E, un ensemble, A, B et C des parties de E.

- $(A = B) \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
- $\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow (A \subset C)$ *la transitivité*

5.2 Intersection et réunion

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *L'associativité*
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *L'associativité*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *la distributivité*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *la distributivité*

5.3 Le complémentaire

- $\bar{A} = E/A$
- $\bar{\bar{A}} = A$
- $\bar{\emptyset} = E$ $\bar{E} = \emptyset$
- $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *loi de Morgan*
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *loi de Morgan*
- $(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$

Exercice : Démontrer les deux dernières assertions.

5.4 La différence

- $A/B = A/(A \cap B)$
- $A/B = (A \cap \bar{B})$

6) Notations généralisées.

Soient $A_1, A_2 \dots A_n$ une famille de parties d'un ensemble E, (qu'on peut noté $(A_i)_{1 \le i \le n}$)

L'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

L'ensemble : $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

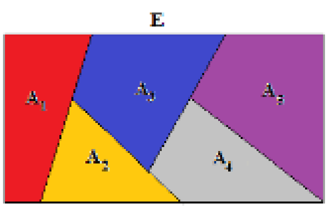
Définition :

Une famille $(A_i)_{1 \le i \le n}$ de parties d'un ensemble E s'appelle **une partition** de l'ensemble E si elle vérifie :

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$
- $(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$ on dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

Exemple :

- Les $(A_i)_{1 \le i \le 5})$ dans le diagramme ci-contre, forment une partition de E
- Les intervalles $]k, k+1]$ où $k \in \mathbb{Z}$ forment une partition de $\mathbb{R}$



7) Produit cartésien

Définition :

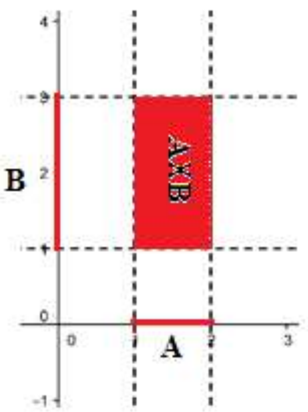
Soient A et B deux ensembles ; **le produit cartésien de A et B** est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, On le note par $A \times B$.

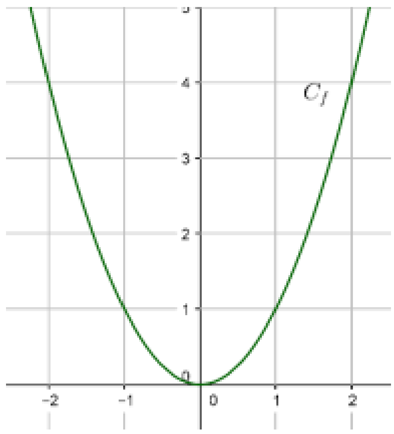
$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Le carrée cartésien d'un ensemble A est l'ensemble $A \times A$ noté A^2

Exemples

$A = [1,2]$; $B = [1,3]$





C_f est la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$

$C_f = \{M(x, y)/x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2\}$

Généralisation :

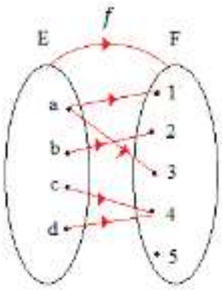
- Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ une famille d'ensembles ; $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se note $\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in A_i\}$.
- $A \times A \times \ldots \times A = A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in A\}$.

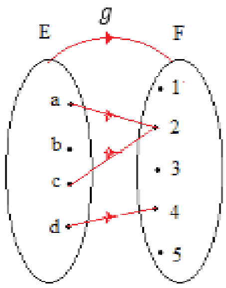
II) LES APPLICATIONS

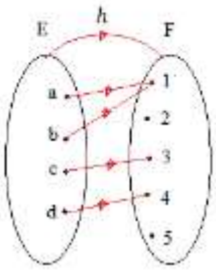
1) Activités

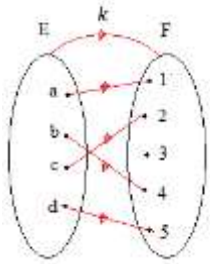
Activité 1 :

Considérons les ensembles $E=\{a,b,c,d\}$ et $F=\{1,2,3,4,5\}$, f,g,h et k sont des relations de E dans F.









Que pouvez-vous dire des relations ci-dessus ?

Activité 2 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\longmapsto \frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$

1-Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :(P) $(a\neq b)\Rightarrow(f(a)\neq f(b))$

3-Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\left(f(x)\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$

4- Montrer que $(\forall y\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right])(\exists x\in\mathbb{R})(f(x)=y)$

2) Définitions et vocabulaires

2.1 Application

Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F.

Vocabulaire :

$$\begin{aligned} f:\quad E&\to F\\ x&\longmapsto y=f(x)\end{aligned}$$

- L'ensemble E s'appelle **ensemble de départ** de l'application f.
- L'ensemble F s'appelle **ensemble d'arrivée** de l'application f.
- $y=f(x)$ s'appelle **l'image de** x par l'application f.
- x s'appelle **l'antécédent** de y par l'application f.

2.2 Egalité de deux applications

Activité :

Soient les deux applications suivantes:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto (-1)^n.n \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

Définition :

On dit que deux applications f et g sont égales si :

- Elles ont le même ensemble de départ E
- Elles ont le même ensemble d'arrivée F
- $(\forall x \in E)(f(x) = g(x))$.

Remarque :

Les 3 applications :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \qquad h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

Sont différentes.

Définition :(injection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est **injective** de E dans F si :
$(\forall (x_1, x_2) \in E^2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ (P)

Par contraposition on peut dire que :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Exemples :

❶ $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}/\{2\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-2} \end{array}$ Montrer que f est injective

❷ $g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 4 \end{array}$ g est-elle injective ?

❸ $h: \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \\ n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \end{array}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Définition :(surjection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est **surjective** de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E.

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E.

Exercices :

❶ $$f: \mathbb{R}/\{2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

1- f est-elle surjective de $\mathbb{R}/\{2\}$ vers $\mathbb{R}$.

2- Modifier l'ensemble d'arrivée pour définir une application surjective.

❷ $$g: \mathbb{R} \to [2,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que la fonction g est surjective.

2- g est-elle injective ?

❸ $$h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \cap [1,+\infty[$$
$$n \longmapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

h est-elle surjective ?

Définition :(bijection)

Soit f une application de E dans F, on dit que f est une **bijection** de E dans F si elle **injective et surjective**

Propriété :

Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$$(\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F})(\exists! \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y})$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E.

Exercice :

$$f: [1,+\infty[\to [2,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que f est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

2- Soit y un élément de $[2,+\infty[$, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans $[1,+\infty[$ tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de $[2,+\infty[$, à l'élément unique x de $[1,+\infty[$ et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : **la bijection réciproque de la bijection f** et se note : f^{-1}

Définition :

Si f est une bijection de E dans F; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution unique de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}.

f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a : $\begin{cases} \boldsymbol{f^{-1}(y) = x} \\ \boldsymbol{y \in F} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x) = y} \\ \boldsymbol{x \in E} \end{cases}$

Exercice 1:

Déterminer la fonction réciproque de la fonction

$$f: [1,+\infty[\to [2,+\infty[$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

Exercice 2 :

Soit la fonction : $g: \quad [1,+\infty[\to \left]0,\frac{1}{2}\right]$
$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

Montrer que g est une application

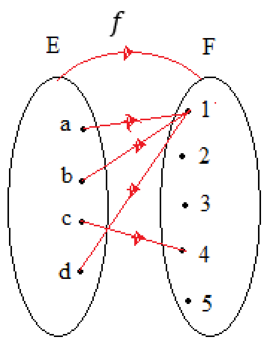
Montrer que l'application g est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $]0,\frac{1}{2}]$ puis déterminer sa bijection réciproque.

3) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

3.1 Activité

Activité 1 :

Soit f l'application dont le diagramme sagittal est représenté ci-contre



1- Déterminer les images directe des ensemble $\{a,b,c\}$ $\{b,c\}$ et E

2- Déterminer les antécédents des éléments qui appartiennent aux ensembles :

{1} ; {1,3} ; {2,3} {1,4}

Activité 2 :

Soit $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que : $(\forall x \in [-1,1])(f(x) \in [\frac{-3}{16},3])$

2- Montrer que : $(\forall y \in [\frac{-3}{16},3])(\exists x \in [-1,1])(f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle $[-1,1]$ par l'application f est l'intervalle $[\frac{-3}{16},3]$ et on écrit : $f([-1,1]) = [\frac{-3}{16},3]$

Activité 3 :

Soit $h: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient $h\big((x,y)\big) = 1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M(x,y)$ qui vérifient $h\big((x,y)\big) = 1$.

Définition :

Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

- L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$
- L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

Remarque :

❶Soit f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

$$f(A) = B \iff \begin{cases} f(A) \subset B \\ B \subset f(A) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\forall x \in A)(f(x) \in B) \\ (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y) \end{cases}$$

❷ $f(A)=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset$ mais si $f^{-1}(B)=\emptyset$,on ne peut pas dire que $B=\emptyset$

$$f:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto 2x^2+1\end{array}$$ on a : $f^{-1}(\mathbb{R}^-)=\emptyset$

❸ Pour parler de l'image réciproque **d'un élément** par une application, il faut que f soit **bijective**

mais on peut considérer l'image réciproque d'un ensemble quel que soit la nature de l'application f.

Propriété :

> Soit f une application de E dans F.
>
> f est surjective de E dans F ,si et seulement si $f(E)=F$.

Preuve :

On a : f une application de E dans F donc : $f(E)\subset F$;si de plus f est surjective alors :

$(\forall y\in F)(\exists x\in E)(f(x)=y)$ et donc $F\subset f(E)$. D'où $f(E)=F$

Réciproquement si $f(E)=F$ alors $F\subset f(E)$ et par suite : $(\forall y\in F)(\exists x\in E)(f(x)=y)$ donc f est surjective.

Exercice

Soit $$f:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto \frac{3}{1+x^2}\end{array}$$ déterminer $f^{-1}([1,2])$

4) Restriction ; Prolongement d'une application

Activité 1:

Soit l'application $$f:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto 3|1-x^2|+x\end{array}$$

Ecrire l'expression de f sur $[-1,1]$

Activité 2 :

Soit l'application $$g:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}/\{1\}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto \frac{3x+1}{x-1}\end{array}$$

1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g, définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition :

> Soit f une application de E dans F
>
> - Soit A une partie de E, l'application définie de A vers F, qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle **la restriction de f sur l'ensemble A.**
> - Soit Γ un ensemble tel que $E\subset\Gamma$, l'application définie de Γ vers F, qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle **un prolongement de f sur l'ensemble Γ.**

7) La partie entière d'un réel.

Théorème :

> On admet la proposition suivante : $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists!\, k\in\mathbb{Z})(k\le x<k+1)$.

Définition :

L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent s'appelle **la partie entière du réel x ;** on le note $[x]$ ou $E(x)$.
L'application qui lie chaque élément x de $\mathbb{R}$ à $E(x)$ dans $\mathbb{Z}$ s'appelle l'application partie entière.

Exemple :

$$E(\sqrt{2}) = 1\ ; \quad E(\pi) = 3\ ; \quad E(-\pi) = -4\ ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(E\left(\frac{1}{n}\right) = 0\right)\ ; \ (\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$$

Exercices :

❶ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m + x) = m + E(x))$.

❷ Vérifier par un contre-exemple que : $E(x + y) \neq E(x) + E(y)$

❸ Soit l'application
$$h: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto E\left(3x + \frac{1}{2}\right) + 1 \end{array}$$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

8) Composition de deux applications.

Activité :

Soient les deux applications :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{x-1} \end{array}$$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

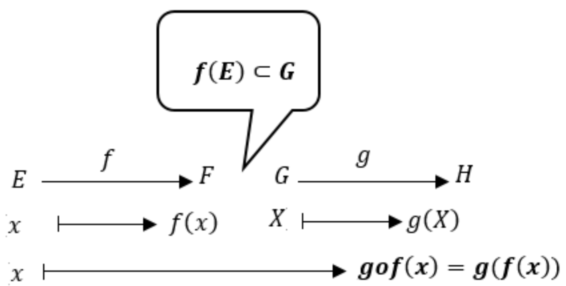
4- Déterminer les application fog et gof.

Définition :

Soient f une application de E dans F et g une application de G dans H tel que : $\boldsymbol{f(E) \subset G}$, l'application h définie de E vers H par : pour tout x dans E, $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note gof.

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})((\boldsymbol{gof})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$$

On peut représenter la composition par :



Propriété :

- La composition de deux applications injectives est une application injective
- Si $F = G$ alors La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

Preuves : En exercice.

Propriété :

- La composition des applications est associative : $(fog)oh = fo(goh)$
- La composition des applications n'est pas commutative : $fog \neq gof$

Propriété :

Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque :

- $(\forall x \in E)((f^{-1}of)(x) = x)$, $f^{-1}of$ s'appelle **l'identité de E** et s note $\mathcal{I}d_E$
- $(\forall x \in F)((fof^{-1})(x) = x)$,fof^{-1} s'appelle **l'identité de F** et s note $\mathcal{I}d_F$
- Si $E = F$ alors : $f^{-1}of = fof^{-1} = \mathcal{I}d_E$