

Exercices de logique

Exercice (1)

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 10y$	$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x + y > 2$	$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y \leq xy$
$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$	$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x + 2y \leq 1$	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) \quad a^2 + 2b^2 > 4ab$

Exercice (2)

Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 4 \Leftrightarrow \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \leq 2x^2 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots x \dots\dots\dots$$

Exercice (3)

- montrer que : $(\forall (a, b) \in [2, +\infty[^2) \quad a^2 - 4a = b^2 - 4b \Rightarrow a = b$
- soient b, a de $\mathbb{R}^*$ tels que $a - b \neq 0$. montrer que $\frac{a+b}{a-b} = 3 \Rightarrow a = 2b$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) \left(x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \right) \Rightarrow (x = y \text{ ou } xy = 1)$
- a) quelle est la négation de la proposition $P \text{ " } (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y - 2xy = 0 \text{ "}$
b) montrer que P est fausse

Exercice (4)

En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad (x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Rightarrow (xy + 1 \neq x + y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad (x \neq y) \Rightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$
- $(\forall x \in \mathbb{N}^*)(\forall y \in \mathbb{N}^*) : xy = 1 \Rightarrow (x = 1 \text{ et } y = 1)$
- $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a > 3 \Rightarrow a + 2 > \sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{2}}}$

Exercice (5)

En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 11/3^{2n} + 2^{6n-5}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 17/3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$
- $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
- $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \frac{n+1}{2}$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2^n (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) = (n+1)(n+2) \times \dots \times (n+n)$
- soit x un réel de $\mathbb{R}^+$. a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$
b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (1+n)^n \geq 2n^n$