Série des exercices 01 : Notion de logique

Exercice 01 :

1. Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques puis indiquer la valeur de vérité de chacune d'elles :

a- Il n'existe aucun rationnelle solution de l'équation $x^2-2=0$
b- Tout entier naturel est pair ou impair.
c- Il existe un réel plus petit que tous les réels.
d- Le carré d'un entier relatif, est supérieur à (-1).
e- Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres.
f- Tout réel inférieur ou égal à (-2) est négatif.
g- Tout entier naturel divisible par 4 est un nbr pair.
h- Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
i- f n'est pas nulle (f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$).
j- f est croissante sur $\mathbb{R}$ (f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$).
k- Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
l- Le dénominateur de la fonction f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.

2. Nier les propositions ci-dessus.

Exercice 02 :

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

$P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2\geq 0"$

$Q:"\left(\exists x\in\mathbb{R}^+\right);\ x^2\leq x\ ou\ x+\dfrac{1}{x}<0"$

$R:"\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right)/x=y\ ou\ x>y"$

$S:"\left(\exists y\in\mathbb{Q}\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)/x=y\ ou\ x>y"$

$M:\left(\left(\forall y\in\mathbb{R}^+\right)\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\ x^2-xy+y^2=0\right)$

$N:\left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z-2}{3}\right)$

$O:"\left(\forall x\in\mathbb{Q}\right);\ x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}"$

$V:"\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)/-1\leq\cos(x)\leq 1"$

$Z:"\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\right):x-y=1\Leftrightarrow x>1"$

Exercice 03 :

1. On considère la proposition :

$$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\ \sqrt{1+x^2}-|x|\geq 0$$

a- Nier la proposition P .
b- Montrer que P est vraie.

2. On considère la proposition :

$$Q:\left(\forall x\in[1;+\infty[\right);\ x^2\geq 1\ \ et\ \ x^2+2x-3\geq 0$$

a- Nier la proposition Q .
b- Montrer que Q est vraie.

3. Considérons la fonction propositionnelle :

$$\left\{(n\in\mathbb{N}):A(n)/\,telque\ \ A(n)=n^2+n+41\right\}$$

a- Calculer $A(0),A(1),A(2)$ et $A(40)$
b- Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$\left[\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):A(n)\text{ est nombre premier}\right]$$

Exercice 04 :

1. Soit $(n\in\mathbb{N})$, montrer que si $2n+1$ est un carré parfait, alors $(n+1)^2$ est la somme de deux carrés parfaits.

2. Soit $(n\in\mathbb{N})$, montrer que si $n+1$ est un carré parfait, alors $14n+14$ est la somme de 3 carrés parfaits.

Exercice 05 : Lois logiques / Tableau de vérité

Soient $p,q\,et\,r$ trois propositions

1.Montrer que

$a-\left(\overline{p\Rightarrow q}\right)\Leftrightarrow\left(p\,et\,\overline{q}\right)$

$b-\left(p\Rightarrow q\right)\Leftrightarrow\left(\overline{q}\Rightarrow\overline{p}\right)$

$c-\left[\left(p\,ou\,r\right)\Rightarrow q\right]\Leftrightarrow\left[\left(p\Rightarrow q\right)et\left(r\Rightarrow q\right)\right]$

$d-\left[\overline{p}\Rightarrow\left(q\,et\,\overline{q}\right)\right]\Rightarrow p$

Sont des lois logiques.

2) En utilisant le tableau de vérité, montrer que

$$\left[p\Rightarrow\left(q\,ou\,r\right)\right]\Leftrightarrow\left[\left(p\,et\,\overline{q}\right)\Rightarrow r\right]$$

Exercice 06 : Raisonnement par contre-exemple

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$P:\left\{\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(\exists m\in\mathbb{N}\right):n<m\right\}$

Q : «Tous les nombres premiers sont impairs »

S : «$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right):n^2+n+1$ est un nombre premier »

$R:\left\{\left(\forall x\in]0;1[\right)\ \dfrac{2x}{x^2\left(1-x^2\right)}<1\right\}$

$T:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ 3\cos x\neq 2\sin^2 x$

$O:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

Exercice 07 : *Raisonnement déductif / par équivalences*

1. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}) : |x-2|\leq 1 \Rightarrow 0<\dfrac{2x+3}{x+2}<\dfrac{9}{5}$
2. Montrer que $(\forall a,b\in\mathbb{R}) :\ a^2+b^2=1\Rightarrow |a+b|\leq\sqrt{2}$
3. Soient x et y deux réels tels que : $|x|\leq\dfrac{1}{2}$ et $|y|\leq 1$

   Montrer que $\left|4x^2y-y-x\right|\leq\dfrac{17}{16}$
4. A- Mq $\left(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\right) : a^2+b^2=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

   B- Soit $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$, montrer que :
   $$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$$
5. A- Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right)\ x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

   B- Soient x et p deux réels strictement positifs, montrer que $x^5-x^3+x=p\Rightarrow x^6\geq 2p-1$
6. Soit $x\in\mathbb{R}$, mq : $|x-1|\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\leq\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{2}{3}$
7. Soit $x\in\mathbb{R}$, mq $\left(x\neq\sqrt{5}\text{ et } x\neq-\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{4+x^2}}\neq 1$

Exercice 08 : *Raisonnement par contraposée*

1. Mq $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right) : x\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{3x}{x+1}\neq 1$
2. Soient a,b deux nombres réels non nuls, tel que $b\neq 2a$ montrer que : $b\neq\dfrac{1}{8}a\Rightarrow\dfrac{a+2b}{2a-b}\neq\dfrac{2}{3}$
3. Mq $\left(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\right) : a\neq 1$ et $b\neq 1\Rightarrow a+b-ab\neq 1$
4. Mq $\left(\forall x,y\in\left]1;+\infty\right[\right) : x\neq y\Rightarrow x^2-2x\neq y^2-2y$
5. Soit $(a,b,c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, montrer que :
   $$a^2+b^2+c^2<2\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\neq\frac{1}{abc}$$

Exercice 09 : *Raisonnement par disjonction des cas*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   $$\sqrt{x-2}\geq x-5\quad ;\quad |x-1|+2x-3\geq 0$$
   $$\sqrt{x^2-5x+6}\leq 2x-3$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $(a)\ 3-2|x-4|=2x+5$; $(b)\ |x-2|+|x-3|=x+2$

   $(c)\ |x-1|+|x+1|=|x|$
3. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}) : |x-1|\leq x^2-x+1$
4. Soit $n,p\in\mathbb{N}$, montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8.
5. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $n\left(n^2+5\right)$ est multiple de 3.

Exercice 10 : *Raisonnement par l'absurde*

1. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

   a- Montrer que le système suivant n'admet pas de solution : $\begin{cases}2x-3z>3\\3y-2x\geq 3\\y-z\leq 2\end{cases}$

   b- On suppose que $x+y>z$, Mq $x>\dfrac{z}{2}$ et $y>\dfrac{z}{2}$
2. Soit x,y et z des réels strictement positifs tels que :
   $$xyz>1\ \text{ et }\ x+y+z<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$
   Montrer que $x\neq 1$ et $y\neq 1$ et $z\neq 1$
3. Montrer que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\notin\mathbb{Q}$
4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
5. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\sqrt{5n+7}\notin\mathbb{N}$
6. Soit $a\in\mathbb{N}$, mq $\sqrt{a^2+\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2+8a+3}}}\notin\mathbb{N}$

Exercice 11 : *Raisonnement par récurrence*

1. Montrer que $(\forall n\geq 3)$; $3^n\geq n^3$
2. Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $3^n+n.3^{n-1}\leq 4^n$
3. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$, 17 divise $\left(3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\right)$
4. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$, 9 divise $\left(7^n+21n-1\right)$
5. Montrer par récurrence les formules suivantes :

   $a-(\forall n\in\mathbb{N}) : \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

   $b-(\forall n\in\mathbb{N}) : \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k^2=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   $c-\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right) : 1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$

   $d-(\forall n\in\mathbb{N})$; $(1+a)^n\geq 1+n\times a$ $\left(\text{avec } a\in\mathbb{R}_+^*\right)$

6- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; 7^n-1 est divisible par 6.

7- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; 4^n+6n-1 est divisible par 9.

8- Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

9- Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

BON COURAGE ☺