

Exercices d'applications

1. (Raisonnement direct) Soient $a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}^+$

Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^{++}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+n \times a$.

Exercices.

Exercice 1 : P, Q des propositions ; Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
4. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$.
5. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir
6. a) $(P \text{ et } Q)$ b) $(\text{non } P \text{ et non } Q)$ c) $(P \Rightarrow Q)$

Exercice 2 : Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes

En langage propositionnel. On note p : les chiens aboient et q : la caravane passe.

- a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
- b) Les chiens n'aboient pas.
- c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3 : Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 - n$ est divisible par 6
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^5 - n$ est divisible par 30
- 3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^7 - n$ est divisible par 42

Exercice 4 : Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. $(3 \text{ est un nombre impair}) \Rightarrow (6 \text{ est un nombre premier})$
2. $(\sqrt{2} \text{ est un nombre irrationnelle}) \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{R}) (1 + 2x < x^2)]$
3. $(5 \text{ est positif}) \Rightarrow (3 \text{ divise } 18)$

Exercice 5 :

1) Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :

- a) $x \in [1,2]$
- b) n divise 6

2) Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :

- a) $x \in [1,2]$
- b) n divise 6.

Exercice 6 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x + 3 > 0$
2. $\forall (a;b) \in \mathbb{Q}^{*2} : a\sqrt{2} + b \neq 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$

Exercice 7 : écrire la négation des propositions suivantes

$Q; (\exists x \in \mathbb{R}) : x < 2 \Rightarrow x^2 \geq 2019$ $P; (\forall x \in \mathbb{R}) : x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$

Exercice 8 : Écrire à l'aide des Quantificateurs la phrase suivante :

- 1) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
- 2) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
- 3) « Pour tout entier n , il existe un unique réel x tel que $x > n$ ».

Exercice 9 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

- 1) Tout entier naturel est pair ou impair.
- 2) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
- 3) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice 10 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes :

- 1) f est constante sur \mathbb{R} (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
- 2) f n'est pas constante sur \mathbb{R}

Exercice 11 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

si $x \in]1; +\infty[$ et $y \in]1; +\infty[$

$$x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$$

Exercice 12 : Etudier la vérité des propositions suivantes :

1. $\exists x \in \mathbb{R} : |x^2 - x| + 3x = 0$
2. $\exists x > 0 : x^2 + 3x = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

