19-2020	Exercices de logique	

Exercice 1

Montrer que chacune des propositions suivantes est fausse en justifiant par un contre-exemple

$i)$ $\left(\forall (a,b)\in \mathbb{R}^2\right)$ $(a+b)^2 = a^2+b^2$

$ii)$ $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\right)$ $|x+y| = |x|+|y|$

$iii)$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $\dfrac{\cos 2\alpha}{2} = \cos\alpha$

Exercice 2

Déterminer la négation des propositions suivantes et donner leurs valeurs de vérité

p " $(\exists x\in\mathbb{Z})(\exists y\in\mathbb{Z})$ $2x-3y=\sqrt{2}$ "

q "$(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})$ $x^2+xy+y^2=0$ "

r " $(\forall x\in[0,2])\left(\exists y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\right)$ $xy-x+2y-1=0$ "

Exercice 3

Dans chacun des cas suivant , déterminer la proposition vraie parmi les deux propositions P ; Q

1) P "$(\forall x\in\mathbb{N})(\exists y\in\mathbb{N})$ $y=2x+1$ "

Q "$(\forall x\in\mathbb{N})(\exists y\in\mathbb{N})$ $x=2y+1$ "

2) P "$(\forall x\in\mathbb{Z})(\exists y\in\mathbb{Z})$ $x-y=3$ "

Q "$(\forall x\in\mathbb{Z})(\exists y\in\mathbb{Z})$ $x-y=3$ "

3) P "$(\exists x\in\mathbb{Q})(\exists y\in\mathbb{Q})$ $y=\sqrt{x}$ "

Q "$(\exists x\in\mathbb{Q})$ $x^2=3$ "

Exercice 4

1) soient a et b deux réels .

Montrer que :

$$\big((\forall x\in\mathbb{R})\ \ ax+b=0\big)\Rightarrow\big(a=0\ \ et\ \ b=0\big)$$

2) soient a et b deux réels non nuls .

Montrer que : $(2x+4y=1)\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2}\le 20$

3) soient $a, b\, et\, c$ trois réels , $c>0$

Montrer l'implication :

$$\big(|a+b|\le c\ \ et\ \ |a-b|\le c\big)\Rightarrow |ab|\le\frac{c^2}{2}$$

Exercice 5

En utilisant un raisonnement par contraposée montrer que :

$\left(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\right)$: $(a\neq -1\ et\ b\neq -1)\Rightarrow ab+a+b\neq -1$

$\left(\forall (x,y)\in\,]2,+\infty[^2\right)$: $(x\neq y)\Rightarrow (x^2+4x\neq y^2+4y)$

$\big[(\forall x\in\mathbb{R}): a<x\Rightarrow b\le x\big]\Rightarrow (a\ge b)$

Exercice 6

1) soient a , b et c des entiers relatifs .

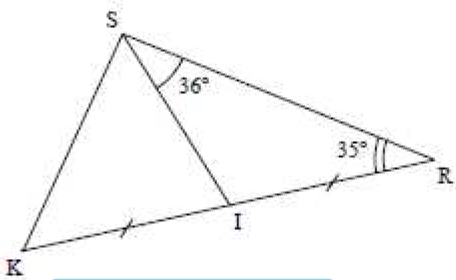
on considère l'équation (E) $ax^2+bx+c=0$

Montrer que si c est impair alors l'équation (E) n'admet pas de solution pair

2) montrer que le système $\begin{cases}4x-2y<0\\ y-2x\le -3\end{cases}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^2$

3)

Le point K est le symétrique du point R par rapport au point I.
Le triangle KSR est-il rectangle en S ?



Exercice 7

Soient x , y et z des réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$ montrer que :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3}$$

Exercice 8

Soient a , b et c les mesures des cotés d'un triangle ABC montrer que :

1) $\left(a^3+b^3+c^3=3abc\right)\Leftrightarrow\left(ABC\ équilateral\right)$

2) $\dfrac{3}{2}\le\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$

proposée par : HIBA OUSSI