

Exercices de logique

Exercice (1)

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes

$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^+) \frac{1+\sqrt{x}}{2} \leq m$	$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x + y > xy$	$(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$
$(\forall x \notin \mathbb{Q}) x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$(\exists x \notin \mathbb{Q})(\exists y \notin \mathbb{Q}) xy \in \mathbb{Q}$	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) a^2 + b^2 = 1$

Exercice (2)

Compléter les énoncés suivants pour avoir des propositions vraies

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{1}{x} < x \Leftrightarrow \dots\dots\dots, \quad (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \leq x \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Exercice (3)

- montrer que : $(\forall (a,b) \in [2, +\infty[^2) a \neq b \Rightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$
- soient b, a de $\mathbb{R}$ tels que $a+b \neq 0$. montrer que $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq 3$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) (xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1} \right)$
- a) quelle est la négation de la proposition $P "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x^2 + y - xy = 0 "$
b) montrer que P est fausse

Exercice (4)

Résoudre les inéquations :

- $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$
- $\sqrt{x-1} - \sqrt{11-x} \geq 2$
- a) déterminer la négation de la proposition $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}): [a \neq b \Rightarrow a^2 \neq b^2]$
b) quelle est la valeur de vérité de la proposition
- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
 - $E\left(\frac{3}{x+1}\right) = 2$
 - $E\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) = \frac{x}{2}$
 - $3E(2x-1) = 2$

Exercice (5)

En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que :

- $9/16^n + 12n - 1$
- $8/1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n$
- $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad (a \in \mathbb{R} - \{1\})$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum_{k=1}^{n-1} k(n+k) = \frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}) (2 \times 3^2) + (2^2 \times 3^3) + \dots + (2^{n-1} \times 3^n) = \frac{18}{5} (6^{n-1} - 1)$

Exercice (6)

1) montrer que $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x^2 + y^2 + xy - x - y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$

2) montrer que $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 1) \quad x \neq y \Rightarrow (x-1)\sqrt{x+1} \neq (y-1)\sqrt{y+1}$

Exercice (7)

Soit h la fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par $h(0) = 3$ et $h(n+1) = 2h(n) + 5$

1) a) calculer $h(1)$ et $h(2)$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) > 0$ et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n+1) - h(n) > 0$

2) montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad h(n) = 2^{n+3} - 5$

Exercice (8)

1) monter que $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \left(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2} \right) \Rightarrow (x=1 \text{ et } y=2 \text{ et } z=3)$

2) montrer que $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}) \quad \frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$

3) soient b, a deux réels et c de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $|a+b| \leq c$ et $|a-b| \leq c$

Montrer que $|a| + |b| \leq c$ et $|ab| \leq \frac{c}{4}$

4) soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (n-k)^2$

Calculer S_3 puis montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice (9)

On considère la proposition $p_n : (\forall n \geq 2) \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$

1) montrer que $p_n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$

2) comparer $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n$

3) a) montrer que $(\forall n \geq 2)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad (1+x)^n > 1+nx$

b) déduire que p_n est vraie

Exercice (10)

1) x, y et z trois rationnels tels que $x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 18$

Montrer que $x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $z \neq x$

2) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad (\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - \sqrt{y}) \Rightarrow (x=y)$

b) résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{x}$