

Exercice 1

Déterminer la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- 1) $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 < x$ 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 \geq n$ 3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad x > \frac{1}{x}$
 4) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) \quad x + y - 2 = 0$ 5) $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + y - 2 = 0$
 6) $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad xy + 2y + x + 2 = 0$ 7) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n(n+1)+1} \in \mathbb{N}$

Exercice 2

En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

- 1) $(\forall x > 1) (\forall y > 1) : (x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$
 2) soient z, y, x trois réels . montrer que : $(x + y > 2z) \Rightarrow (x > z \text{ ou } y > z)$
 3) b, a deux réels tels que $b \neq 2a$ montrer que $b \neq \frac{1}{4}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7}$
 4) $[(\forall x \in \mathbb{R}) : (a < x \Rightarrow b < x)] \Rightarrow (b \leq a)$
 5) montrer que tout y, x de $\mathbb{R}$ on a : $\left(x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } y \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Exercice 3

En utilisant l'absurde montrer que :

- 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$ 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{n^2 + 7n + 12} \notin \mathbb{N}$
 3) soient n un entier naturel impair et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments distincts de $E = \{1, 2, \dots, n\}$
 Montrer que $(\exists k \in E) \quad (n - k \text{ est impair})$
 4) soient c, b, a des réels de $\mathbb{R}^{+*}$ et tels que $abc > 1$ et $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
 a) montrer que $a \neq 1$ et $b \neq 1$ et $c \neq 1$
 b) montrer que $a < 1$ ou $b < 1$ ou $c < 1$

Exercice 4

Utiliser le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

- 1) a) si n est non divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3
 b) déduire que le nombre $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 pour tous a et b de $\mathbb{N}$

2) $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$ 3) $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

Exercice 5

Montrer par récurrence que : 1) 9 divise $4^n + 6n - 1$ 2) 3 divise $4n^3 - n$

3) $7 / 3^{2n+3} + 2^{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 4) $11 / 9^{n+1} + 2^{6n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

5) $(\forall n \geq 1) (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad (1+x)^n > 1+nx$ 6) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

7) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 8) $\sum_{k=1}^{n} k 2^k = 2 + (n-1)2^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

9) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\forall a \neq 1) (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 10) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

11) $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 12) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 6

Soient a et b deux réels de $[0,1]$. on pose $A = ab$; $B = a(1-b) + b(1-a)$ et $C = (1-a)(1-b)$

- 1) montrer que $B \geq 2(\sqrt{ab} - ab)$
- 2) on suppose que $A < \frac{4}{9}$ et $B < \frac{4}{9}$ et $C < \frac{4}{9}$
 - a) montrer que $ab - \sqrt{ab} + \frac{2}{9} > 0$ puis déduire que $ab < \frac{1}{9}$
 - b) montrer que $C < \frac{4}{9} \Rightarrow a + b - ab > \frac{5}{9}$
 - c) montrer que $B \geq \frac{4}{9}$. que peut-on déduire

Exercice 7

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on pose $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$

- 1) montrer que $(\forall n \geq 2) P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$
- 2) a) vérifier que $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$
- b) déduire que $(\forall n \geq 2) P_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$

Exercice 8

Soit a un élément de $]0,1[$.

- 1) montrer que $(\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2) p \leq q \Rightarrow a^p \geq a^q$
- 2) a) montrer que $a + a^2 + \dots + a^n = a \frac{1 - a^n}{1 - a}$
- b) déduire que $1 - a^n \geq n(1 - a)a^{n-1}$
- 3) prends $a = 1 - \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$

Exercice 9

- 1) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (2n+1 \text{ est un carré parfait}) \Rightarrow (n+1 \text{ est somme de deux carrés parfaits})$
- 2) a) montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
- b) déduire que pour tous réels c, b, a de $\mathbb{R}^{*+}$ on a : $\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$
- 3) montrer que la proposition $(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}) \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$ est fausse
- 4) on pose $A_n = \underbrace{777\dots7}_{n \text{ fois}}$ montrer que $A_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$
- 5) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{3} \in \mathbb{N} \right)$
- b) déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$