

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$

1) déterminer  $D_f$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) étudier les branches infinies de la courbe  $(C)$

3) a) montrer que  $(\forall x \in D_f) \quad f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - x + 1)^2}$

b) montrer que  $f$  est strictement croissante puis dresser le tableau de variations de  $f$

4) a) vérifier que  $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = x + 1 - \frac{1}{x^2 - x + 1}$

b) étudier la position de  $(C)$  par rapport à la droite  $(\Delta) \quad y = x + 1$

5) a) montrer que  $(\forall x \in D_f) \quad f''(x) = \frac{-6x(x-1)}{(x^2 - x + 1)^3}$

b) étudier la concavité de la courbe  $(C)$  en précisant les coordonnées des points d'inflexions

6) tracer la courbe  $(C)$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

7) on considère la fonction  $g$  telle que  $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - |x| + 1}$

a) étudier la parité de la fonction  $g$

b) tracer dans un repère  $(O', \vec{u}, \vec{v})$  la courbe de la fonction  $g$  (justifier votre réponse)

c) déduire de la courbe les équations des droites asymptotes

**Exercice 2**

On pose  $A(x) = \sqrt{3}(4 \cos^4 x + \sin^2 2x) - 2 \sin 2x$

1) montrer que  $4 \cos^4 x = 4 \cos^2 x - \sin^2 2x$

2) en déduire que  $A(x) = 4 \cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x)$

3) résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$

4) montrer que  $\left( \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \right) \quad A(x) = 4 \cos^2 x (\sqrt{3} - \tan x)$

5) résoudre dans  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  l'inéquation  $4 \cos^4 x + \sin^2 2x \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2x$