

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$

- 1) déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) étudier les branches infinies de la courbe (C)
- 3) a) montrer que $(\forall x \in D_f) f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - x + 1)^2}$
b) montrer que f est strictement croissante puis dresser le tableau de variations de f
- 4) a) vérifier que $(\forall x \in D_f) f(x) = x + 1 - \frac{1}{x^2 - x + 1}$
b) étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) $y = x + 1$
- 5) a) montrer que $(\forall x \in D_f) f''(x) = \frac{-6x(x - 1)}{(x^2 - x + 1)^3}$
b) étudier la concavité de la courbe (C) en précisant les coordonnées des points d'inflexions
- 6) tracer la courbe (C) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 7) on considère la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - |x| + 1}$
 - a) étudier la parité de la fonction g
 - b) tracer dans un repère (O', \vec{u}, \vec{v}) la courbe de la fonction g (justifier votre réponse)
 - c) déduire de la courbe les équations des droites asymptotes

Exercice 2

On pose $A(x) = \sqrt{3}(4 \cos^4 x + \sin^2 2x) - 2 \sin 2x$

- 1) montrer que $4 \cos^4 x = 4 \cos^2 x - \sin^2 2x$
- 2) en déduire que $A(x) = 4 \cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x)$
- 3) résoudre dans \mathbb{R} l'équation $A(x) = 0$
- 4) montrer que $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) A(x) = 4 \cos^2 x (\sqrt{3} - \tan x)$
- 5) résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ l'inéquation $4 \cos^4 x + \sin^2 2x \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2x$