Exercice 1

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3}$

on pose $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 3$

b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante

2) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

3) exprimer V_v en fonction de puis déduire U_n en fonction de

4) calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{4}{U_k + 1}$

Exercice 2

On considère les ensembles $A = \{ 5k + 3 \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$

$B = \{ 3k' + 4 \ / \ k' \in \mathbb{Z} \}$ et $E = \{ 15q + 8 \ / \ q \in \mathbb{Z} \}$

1) vérifier que $13 \notin E$ et $13 \in A \cap B$

2) montrer que $E \subset A$. est-ce que $A = E$?

3) déterminer $A \cap B$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|} + x$

1) montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ interpréter graphiquement le résultat

2) a) calculer les limites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) en $+\infty$

3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0

4) a) calculer la fonction dérivée $f'(x)$ pour de $\mathbb{R}^{*-}$ et de $\mathbb{R}^{*+}$

b) montrer que est croissante sur $]0 + \infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[$ puis dresser le tableau de variations

5) tracer la courbe (C_f) et la demie-tangente au point d'abscisse 0

Exercice 4

On pose $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ x + y\sqrt{2} \ / \ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \}$

1) soient a et b deux éléments de $\mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$

montrer que $a = 0$ et $b = 0$

2) on considère l'application F définie de $\mathbb{Q}^2$ vers $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2) \quad F((x, y)) = x + y + 2y\sqrt{2}$

a) montrer que F est injective

b) montrer que F est une bijection de $\mathbb{Q}^2$ vers $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et déterminer sa réciproque