

MANTI	Devoir 2	1 ^{ère} BAC SM		
Exercice 1				
Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :	$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & ; x \geq 1 \\ \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{ x } & ; 0 < x < 1 \end{cases}$			
1) a) calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ b) interpréter graphiquement les résultats obtenus 2) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (Δ) $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$ 3) a) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 1 et donner une interprétation graphique b) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1 et donner une interprétation graphique 4) a) calculer $f'(x)$ pour x de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ b) montrer que f est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et qu'elle est croissante sur $]1, +\infty[$ 5) a) montrer que $(\forall x \in]0, 1[)$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$ et déduire le sens de variation de f sur $]0, 1[$ b) calculer $f'(x)$ pour x de $]-1, 0[$ puis montrer que f est croissante sur $]-1, 0[$ 6) dresser le tableau de variations de la fonction f 7) a) résoudre dans $]-1, 0[$ l'équation $f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement b) tracer la courbe (C)				
Exercice 2				
Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$				
1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq U_n < 4$ b) montrer par récurrence que $(U_n)_n$ est croissante				
2) soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \frac{3}{4 + \sqrt{3x + 4}}$				
Etudier le sens de variation de f sur $[0, 4]$ et déduire que $(\forall x \in [0, 4])$ $f(x) \leq \frac{1}{2}$				
3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$ b) montrer que $4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$				
4) on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} U_k$. montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $4 - \frac{4}{n} + \frac{4}{2^n n} \leq S_n \leq 4$				