

MANTI	Devoir 2	1 ^{ère} BAC SM
Exercice 1		
<p>Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :</p> $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{ x } & ; 0 < x < 1 \end{cases}$		
<p>1) a) calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ b) interpréter graphiquement les résultats obtenus</p>		
<p>2) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) \ y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$</p>		
<p>3) a) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 1 et donner une interprétation graphique b) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1 et donner une interprétation graphique</p>		
<p>4) a) calculer $f'(x)$ pour x de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ b) montrer que f est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et qu'elle est croissante sur $]1, +\infty[$</p>		
<p>5) a) montrer que $(\forall x \in]0, 1[) \ f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$ et déduire le sens de variation de f sur $]0, 1[$ b) calculer $f'(x)$ pour x de $]-1, 0[$ puis montrer que f est croissante sur $]-1, 0[$</p>		
<p>6) dresser le tableau de variations de la fonction f</p>		
<p>7) a) résoudre dans $]-1, 0[$ l'équation $f(x) = 0$ et interpréter le résultat graphiquement b) tracer la courbe (C)</p>		
Exercice 2		
<p>Soit $(U_n)_n$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$</p>		
<p>1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 \leq U_n < 4$ b) montrer par récurrence que $(U_n)_n$ est croissante</p>		
<p>2) soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \frac{3}{4 + \sqrt{3x + 4}}$ Étudier le sens de variation de f sur $[0, 4]$ et déduire que $(\forall x \in [0, 4]) \ f(x) \leq \frac{1}{2}$</p>		
<p>3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$ b) montrer que $4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$</p>		
<p>4) on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} U_k$. montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ 4 - \frac{4}{n} + \frac{4}{2^n n} \leq S_n \leq 4$</p>		