G.S.GAUSS	DEVOIR 4	MANTI

Exercice 1

Soit a un réel de $]1,+\infty[$ et on considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{aU_n + 1}{U_n + a}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 1$
2) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante
3) on pose $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{a+1}{a-1}$

b) exprimer V_n en fonction de n puis déduire que :

$$U_n = \frac{3(a+1)^n + (a-1)^n}{3(a+1)^n - (a-1)^n}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{\sqrt{x} - 1}$

1) a) déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) calculer les limites $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$

donner une interprétation graphique du résultat

2) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) + 2}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat

4) a) montrer que $(\forall x \in D_f - \{0\}) \qquad f'(x) = \dfrac{(x+1)(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$

b) dresser le tableau de variations de f

5) tracer la courbe (C_f)

Exercice 3

Soit n un entier supérieur à 2 .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x^n + 1}{(x+1)^n}$

1) montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \qquad f'(x) = \dfrac{n(x^{n-1} - 1)}{(x+1)^{n+1}}$

3) a) montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $[0,1]$

b) dresser le tableau de variations de f

4) soient a *et* b deux réels de $\mathbb{R}^{*+}$.

En utilisant la fonction f déduire que $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$

Exercice 4

Soit $(U_n)_{n>0}$ la suite définie par : $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k}$

montrer que $(U_n)_{n>0}$ est strictement croissante