

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

3 pts

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{2x + 9}{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+5} - 1}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{xE(3x) - 4}{x^2 - 1}$

1 pt

1) a) montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[)$ $\frac{3x - 4}{x - 1} < f(x) \leq \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 1}$

0.5 pt

b) en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1.5 pts

2) déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 3

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$

1.5 pts

1) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

1.5 pts

2) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - 2x = 1$

2 pts

3) étudier la dérivalibilité de g à droite de 0 et à gauche de -2

Exercice 4

PARTIE (1) déterminer en fonction de n les deux sommes :

1.5 pts

$$S_1 = 2^4 + 2^6 + 2^8 + \dots + 2^{2n+4} \quad \text{et} \quad S_2 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+3}$$

PARTIE (2) Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 1 + 4U_n + \sqrt{1 + 4U_n}$

0.5 pt

1) a) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > 0$

0.5pt

b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est croissante

2) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) V_n = \sqrt{1 + 4U_n}$

1.5 pts

montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) V_{n+1}^2 = 4 \left(V_n + \frac{1}{2} \right)^2$ en déduire V_{n+1} en fonction de V_n

3) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) W_n = 1 + V_n$

1 pt

a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

1 pt

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{1}{4} (W_n^2 - 2W_n)$

0.5 pt

c) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{1}{4} (2^{2n+4} - 2^{n+3})$

1.5 pts

puis montrer que $\sum_{k=0}^{k=n} U_k = \frac{1}{3} \times 2^{2n+4} - 2^{n+2} + \frac{2}{3}$