

Devoir 4

1 bac SM

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

3 pts

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{2x + 9}{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+5} - 1}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$$

Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2(3x) - 4}{x^2 - 1}$

1 pt

1) a) montrer que  $(\forall x \in ]1, +\infty[) \quad \frac{3x-4}{x-1} < f(x) \leq \frac{3x^2-4}{x^2-1}$

0.5 pt

b) en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1.5 pts

2) déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 3

On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$

1.5 pts

1) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

1.5 pts

2) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$  puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - 2x = 1$

2 pts

3) étudier la dérivabilité de  $g$  à droite de 0 et à gauche de -2

Exercice 4

PARTIE (1) déterminer en fonction de  $n$  les deux sommes :

1.5 pts

$$S_1 = 2^4 + 2^6 + 2^8 + \dots + 2^{2n+4} \quad \text{et} \quad S_2 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+3}$$

PARTIE (2) Soit  $(U_n)_n$  la suite définie par :  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = 1 + 4U_n + \sqrt{1 + 4U_n}$

0.5 pt

1) a) prouver que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0$

0.5pt

b) montrer que la suite  $(U_n)_n$  est croissante

2) on pose  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n = \sqrt{1 + 4U_n}$

1.5 pts

montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_{n+1}^2 = 4\left(V_n + \frac{1}{2}\right)^2$  en déduire  $V_{n+1}$  en fonction de  $V_n$

3) on pose  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n = 1 + V_n$

1 pt

a) montrer que  $(W_n)_n$  est une suite géométrique en déterminant sa raison

1 pt

b) prouver que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{1}{4}(W_n^2 - 2W_n)$

0.5 pt

c) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{1}{4}(2^{2n+4} - 2^{n+3})$

1.5 pts

puis montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} U_k = \frac{1}{3} \times 2^{2n+4} - 2^{n+2} + \frac{2}{3}$