17-2018	**Devoir 3**	1ÈRE BAC SM

EXERCICE (1)

On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ telles que :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases}$$

1) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < V_n$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante et $(V_n)_n$ décroissante

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n}$

4) a) montrer que par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n V_n = 2$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < \sqrt{2} < V_n$

EXERCICE (2)

Soit un réel de a $]0,+\infty[$ on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = b < a$ et $U_{n+1} = \dfrac{a^2}{2a - U_n}$

1) a) vérifier que $U_{n+1} - a = \dfrac{a(U_n - a)}{a + (a - U_n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < a$

2) montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante

3) on pose $V_n = \dfrac{a}{a - U_n}$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer U_n en fonction de n ; b et a

b) déterminer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{a - U_k}$ en fonction de n ; b et a

EXERCICE (3)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + 2^n U_n}$

1) *calculer U_1 et U_2*

2) a) *montrer que* $\dfrac{1}{U_{n+1}} = \dfrac{1}{U_n} + 2^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b) *déduire l'expression de U_n en fonction de n*

BONUS

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. On $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = U_0 + U_1 + \dots\dots + U_{n-1}$

m et n deux entiers naturels différents

1) *démontrer que* $S_m = S_n \Leftrightarrow (m + n - 1) r = -2U_0$

2) *en déduire que* $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$