



**Exercice1 (7,5 points) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 2$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) , u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 3$ .

2) a- Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 4}$

b- Dédurre la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3) Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a- Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{2}{5}$ .

b- Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} , S_n = \sum_{k=0}^n v_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3}{u_k + 2}$ .

a- Déterminer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

b- Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - v_n = \frac{3}{u_n + 2}$

c- Dédurre l'expression de  $T_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice2 (2 points) :**

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x; y) \longmapsto (3x - y; x - 3y)$

Montrer que l'application  $f$  est bijective , et déterminer sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .

**Exercice3 : (7 points) :**

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$$

1) a- Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}$  , n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}^+$ .

b-  $f$  est-elle surjective ?

c- Montrer que  $f$  est injective .

2) On considère l'application  $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$   
 $x \longmapsto \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$

a- Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad g(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$  , et déduire que  $g^{-1}\left(\left[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ .

b- Montrer que :  $g(\mathbb{R}^+) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ .

c- Dédurre que l'application  $g$  est bijective , et déterminer sa bijection réciproque  $g^{-1}$ .

**Exercice4** (3,5 points) :

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vide d'un ensemble  $E$

On considère l'application  $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$

$$X \longmapsto (X \cup A; X \cup B)$$

1) a- Calculer  $f(\emptyset)$  et  $f(A \cap B)$

b- Montrer que :  $f$  est injective  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

2) Montrer que  $f$  n'est pas surjective .