

Exercice1 (7,5 points) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 3$.

0,5 2) a- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 4}$

1 b- Déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1 a- Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

1,5 b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3}{u_k + 2}$.

1 a- Déterminer S_n en fonction de n.

0,5 b- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 - v_n = \frac{3}{u_n + 2}$

1 c- Déduire l'expression de T_n en fonction de n.

Exercice2 (2 points) :

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x; y) \longmapsto (3x - y; x - 3y)$

1,5+0,5 Montrer que l'application f est bijective, et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice3 : (7 points) :

On considère l'application $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$

0,5 1) a- Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$, n'admet pas de solution dans \mathbb{R}^+ .

0,5 b- f est-elle surjective ?

1 c- Montrer que f est injective.

2) On considère l'application $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right]$
 $x \longmapsto \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$

0,5 + 1 a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad g(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$, et déduire que $g^{-1}\left(\left[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{6} \right]\right) = \left[0; \frac{1}{4} \right]$.

1,5 b- Montrer que : $g(\mathbb{R}^+) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right]$.

1 + 1 c- Déduire que l'application g est bijective, et déterminer sa bijection réciproque g^{-1} .

Exercice4 (3,5 points) :

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E

On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$

$$X \longmapsto (X \cup A; X \cup B)$$

1 1) a- Calculer $f(\emptyset)$ et $f(A \cap B)$

1,5 b- Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

1 2) Montrer que f n'est pas surjective.