

Exercice (1)

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \frac{2x-2}{x+1}$

Partie (1)

- 1.5 pt 1) a) dresser le tableau de variation de f et g
- 1.5 pts b) qu'elle est la nature de chacune des courbes (C_f) et (C'_g) et leurs éléments caractéristiques
- 1 pt 2) a) prouver que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0$
- 1 pt b) déduire les points d'intersections des courbes (C_f) et (C'_g)
- 0.5 pt 3) a) déterminer les points d'intersections de la courbe (C_f) et l'axe des abscisses
- 2 pts b) tracer dans un même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les deux courbes (C_f) et (C'_g)
- 1 pt 4) résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 - x - 1 \geq \frac{x-3}{x+1}$

Partie (2)

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} telle que :
$$\begin{cases} F \text{ est paire} \\ F(x) = g(x) & ; \quad x \leq -2 \\ F(x) = f(x) & ; \quad -2 < x \leq 0 \end{cases}$$

- 2 pts 1) calculer $F(5)$ et $F\left(\frac{3}{2}\right)$
- 1.5 pts 2) donner le tableau de variation de F sur \mathbb{R}
- 1 pt 3) donner une expression de $F(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0, 2[$
- 1.5 pts 4) tracer dans un autre repère (O', \vec{i}, \vec{j}) la courbe de la fonction F

Exercice (2)

- 0.75 pt 1) soit f un fonction périodique de période T
- a) montrer par récurrence que $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad f(x + kT) = f(x)$
- 0.75 pt b) en déduire que $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad f(x + kT) = f(x)$
- 2) soient c un réel et f une fonction périodique de période T telle que :
$$(\forall x \in [0, T[) \quad f(x) = c$$
- 0.5 pt a) soit x un réel et on pose $k = E\left(\frac{x}{T}\right)$. encadrer $x - kT$
- 0.5 pt b) en déduire que $f(x) = c$
- 3) soit n un entier non nul .
- on considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par :
$$F(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) - E(x)$$
- 1 pt a) montrer que $T = 1$ est une période de F
- 2 pts b) donner l'expression de $F(x)$ pour tout x de $[0, 1[$ puis conclure