

1BSM	<u>Mathématique</u> Contrôle 2	 Lycée Anisse
semestre 1	23/11/2017	

Durée : 2h

Exercice 1: (5 Points)

Soit f une application définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers \mathbb{R} par :
$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$$

1. Montrer que f est une application injective. 2pts
2. Déterminer : $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ 1pts
3. Déterminer : $f([1; +\infty[)$ et $f^{-1}([-1; 2[)$. 2pts

Exercice 2: (2.5 Points)

Soit g une application définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :
$$g(x) = x^3 + x - 2$$

1. Montrer que g est une application injective 1.5pts
2. Déduire les solutions de l'équation $g(x) = 0$. 1pts

Exercice 3: (3 Points)

$$h : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

Soit h une application définie par :

$$x \rightarrow x + \frac{1}{x}$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $h\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)$. h est-elle injective ? justifier 1.5pts
2. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$: $h(x) \geq 2$. h est-elle surjective ? justifier 1.5pts

Exercice 4: (2 Points)

$$F : [4; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$$

Montrer que l'application :

est bijective

$$x \rightarrow \sqrt{x} - 2\sqrt{x}$$

2pts

et que : $F^{-1}(x) = \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)^2$ pour tout $x \in [0, +\infty[$

Exercice 5: (2.5 Points)

Soit une fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1 : Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$

1.5pts

2 : Déduire que : $\forall x \in [0,1] : -1 \leq f(x) \leq 1$

1pts

Exercice 6: (3.5 Points)

On considère l'ensemble E définie par : $E = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x-1}} \mid x \in]1; +\infty[\right\}$

1. Montrer que : $3 \in E$ et que $1 \notin E$

1pts

2. Montrer que : $E \subset [2; +\infty[$

1pts

3. **a.** Prouver que $(\forall y \in [2; +\infty[) (\exists x \in]1; +\infty[) : y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

1pts

b. Déduire que $E = [2; +\infty[$

0.5pts

Exercice 7: (1.5 Points)

Soit G la fonction définie par : $G(x) = \frac{x - E(x)}{x + 1 - E(x)}$

1. Démontrer que $D_G = \mathbb{R}$.

0.5pts

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : G(x+1) = G(x)$.

0.5pts

3. Montrer que $\forall x \in [0; 1[: G(x) = \frac{x}{x+1}$.

0.5pts

« Sans doute il serait plus simple de n'enseigner que le résultat. Mais l'enseignement des résultats de la science n'a jamais été un enseignement scientifique ». **Gaston Bachelard**.

Bon courage