

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{x+2}{x}$ et $g(x) = x^2 + 2x$

Partie (1)

- 1) a) dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et g (1.5 pt)
- b) quelle est la nature des courbes (C_f) ; (C_g) et leurs éléments caractéristiques (1.5 pt)
- 2) a) résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ (1 pt)
- b) en déduire que (C_f) et (C_g) se coupent en trois points à déterminer (1 pt)
- 3) a) tracer dans un même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les deux courbes (C_f) et (C_g) (2 pts)
- b) résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{2}{x} \geq (x+1)^2 - 2$ (1.5 pt)

Partie (2)

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \notin [-2, 1] \\ F(x) = g(x) & \text{si } x \in [-2, 1] \end{cases}$$

- 1) a) dresser le tableau de variation de F (1 pt)
- b) tracer dans un repère (O', \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de la fonction F (1.5 pt)
- 2) discuter suivant m le nombre de solutions de l'équation $F(x) = m$ (1.5 pt)
- 3) on pose $h(x) = \frac{1}{x}$
 - a) résoudre dans \mathbb{R}^* : $-2 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ (1.5 pt)
 - b) exprimer $(F \circ h)(x)$ en fonction de x (2 pts)

Exercice 2

On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par : $G(x) = E(2x) - E(x) - E\left(x + \frac{1}{2}\right)$

- 1) vérifier que $T = 1$ est une période de G (1 pt)
- 2) exprimer $G(x)$ dans chacun des intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (1.5 pt)
- 3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$ (1.5 pt)

Exercice « bonus »

- 1) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab}$
- 2) a, b et c trois réels strictement positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$ montrer que $abc \leq 1$