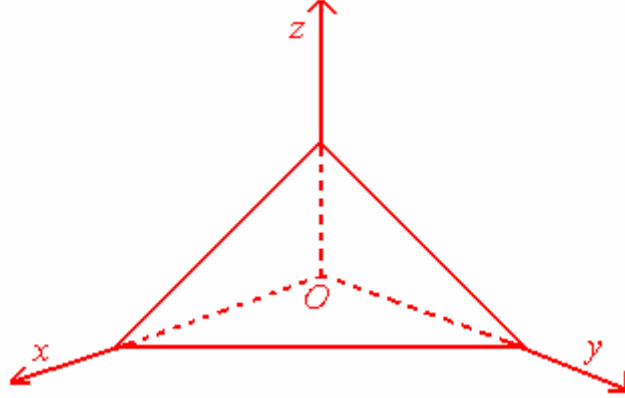
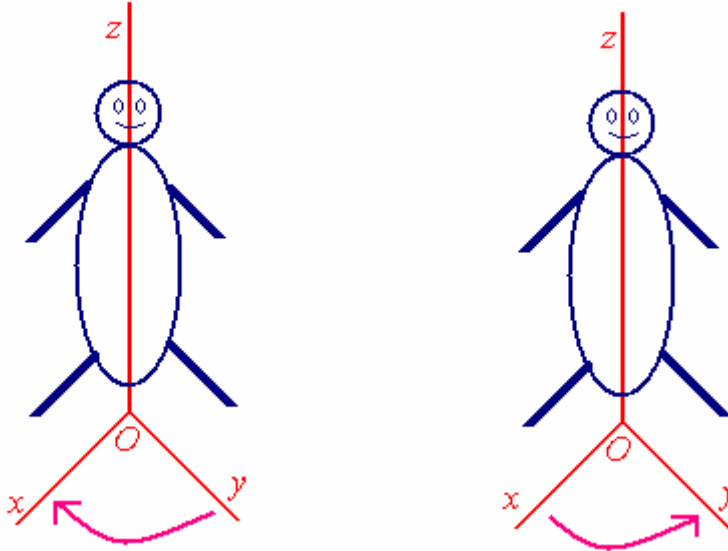


الأستاذ : الحيان	الجداء المتجهي	الثانية بكالوريا علوم تجريبية
Orientation de l'espace Tetraèdre :		-I توجيه الفضاء : 1. ثلاثي الأوجه : تعريف :
<p>ثلاثة أنصاف مستقيم في الفضاء (Ox) و (Oy) و (Oz) وغير مستوائية ، تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه ، نرمز له بالرمز (Ox, Oy, Oz) . (Ox) و (Oy) و (Oz) تسمى أحرف ثلاثي الأوجه .</p>		
		
Le Bonhomme d'Ampère :		2. رجل أمبير : تعريف :
<p>رجل أمبير لثلاثي الأوجه (Ox, Oy, Oz) هو شخص خيالي محمول على الحرف (Oz) ، رجلاه في الأصل O ، ويرى الحرف (Ox) . يوجد موضعان للحرف (Oy) بالنسبة لرجل أمبير : الحرف (Oy) عن يساره . الحرف (Oy) عن يمينه .</p>		
		
<p>3. منحى ثلاثي الأوجه وتوجيه الفضاء : اتفاق : لما يكون رجل أمبير على الحرف (Oz) ورجلاه في O وهو يرى الحرف (Oy) عن يساره ، نقول إن ثلاثي الأوجه (Ox, Oy, Oz) مباشر (أو موجب) .</p>		

بهذا نكون قد وجهنا الفضاء إلى صنفين :

• صنف ثلاثي أوجه مباشر .

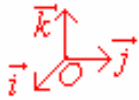
• صنف ثلاثي أوجه غير مباشر .

4. معلم موجه في الفضاء :

نعتبر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما في الفضاء (\mathcal{E}) . نضع : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

تعريف :

يكون $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما مباشرا للفضاء (\mathcal{E}) إذا كان ثلاثي الأوجه (OI, OJ, OK) مباشرا .



Les Bases directes :

5. الأسس المباشرة :

تعريف :

ليكن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساسا للفضاء \mathcal{V}_3 . ولتكن O نقطة من الفضاء (\mathcal{E}) . إذا كان $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما مباشرا للفضاء (\mathcal{E}) ، فإننا نقول إن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس مباشر للفضاء \mathcal{V}_3 .

Orientation d'un Plan dans l'espace :

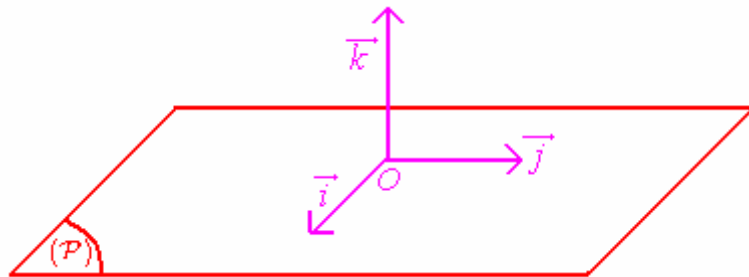
6. توجيه مستوى في الفضاء :

نعتبر (\mathcal{P}) مستوى في الفضاء (\mathcal{E}) ، و \vec{k} متجهة واحدة منتظمة على المستوى (\mathcal{P}) .

من نقطة $O \in (\mathcal{P})$ ، ننشئ معلما متعامدا ممنتظما $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للفضاء (\mathcal{E}) .

يكون المعلم المتعامد الممنتظم (O, \vec{i}, \vec{j}) مباشرا في المستوى (\mathcal{P}) ، إذا كان المعلم المتعامد

الممنتظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشرا في الفضاء (\mathcal{E}) .



توجيه مستوى (\mathcal{P}) في الفضاء (\mathcal{E}) ، يتم بتوجيه متجهة \vec{k} منتظمة عليه .

Produit Vectoriel de deux vecteurs :

II. الجداء المتجهي لمتجهتين :

1. تعريف :

في الفضاء الموجه ، نعتبر \vec{u} و \vec{v} متجهتين ونعتبر O نقطة من الفضاء (\mathcal{E}) .

نعلم أن : $\exists! (A, B) \in (\mathcal{E})^2 / \vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

✓ إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} ، في

هذا الترتيب ، هو المتجهة \vec{w} التي تحقق ممثلتها \overrightarrow{OC} الشروط التالية :

$$(\overrightarrow{OC}) \perp (\overrightarrow{OAB})$$

• ثلاثي الأوجه $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ مباشر .

$$\| \overrightarrow{OC} \| = \| \overrightarrow{OA} \| \times \| \overrightarrow{OB} \| \times \sin(\theta) \quad , \quad \theta \text{ هو قياس الزاوية الهندسية } [A \hat{O} B]$$

- ✓ إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} ، في هذا الترتيب ، هو المتجهة المنعدمة $\vec{0}$
- ✓ نرسم للجداء المتجهي لمتجهتين \vec{u} و \vec{v} ، في هذا الترتيب ، بالرمز $\vec{u} \wedge \vec{v}$ أو $(\vec{u} \times \vec{v})$ ونقرأ : \vec{u} متجهي \vec{v} .

ملاحظتين : أ- لكل متجهتين غير منعدمتين \vec{u} و \vec{v} من الفضاء \mathcal{V}_3 ، لدينا :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$$

ب- إذا كان $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ ، فإن المثلث $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساس مباشر للفضاء \mathcal{V}_3 .

مثال : أحسب $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ في كل من الحالتين التاليتين :

أ- $\|\vec{u}\| = 10$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$.

ب- $\|\vec{u}\| = 6$ و $\|\vec{v}\| = 6$ و $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

2. تطبيق : بين متساوية Lagrange : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 : \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

3. خاصيات :

أ- لكل $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}_3^3$ ، لدينا : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{w} \perp \vec{v}$.

ب- تخالف الجداء المتجهي : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 : \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

ج- خطانية الجداء المتجهي :
خاصية :

لتكن \vec{u}_1 و \vec{u}_2 و \vec{u} و \vec{v}_1 و \vec{v}_2 و \vec{v} متجهات من الفضاء \mathcal{V}_3 ، وليكن $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$.

• $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2)$.

• $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

• $\vec{u} \wedge (\beta \vec{v}) = \beta (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

د- انعدام الجداء المتجهي (شرط استقامية متجهتين) :

خاصية :

يكون الجداء المتجهي لمتجهتين \vec{u} و \vec{v} منعدما إذا وفقط إذا كانت المتجهتان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان .

برهان : لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء \mathcal{V}_3 . نضع : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. لدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta) = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \text{ أو } \|\vec{v}\| = 0 \text{ أو } \|\vec{u}\| = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0} \text{ أو } (\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ لهما نفس الاتجاه})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

نتيجة :

في الفضاء الموجه ، لدينا :
 $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow [A, B, C \text{ نقط مستقيمة}]$

تطبيق : ليكن ABC مثلثا .

1. بين أن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

2. استنتج علاقة الأحياب الثلاثة في المثلث ABC :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{BC} = \frac{\sin(\widehat{B})}{CA} = \frac{\sin(\widehat{C})}{AB}$$

III. تحليلية الجداء المتجهي :

1. خاصية وتعريف :

ليكن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما للفضاء \mathcal{V}_3 .

لتكن $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ متجهتين من الفضاء \mathcal{V}_3 . لدينا :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

برهان : نعلم أن : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$ و $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$ و $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ و $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ و $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ و $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

إذن : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) \\ &\quad + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k}) \end{aligned}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

وبالتالي فإن : $\vec{u} \wedge \vec{v} \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

تطبيق : في الفضاء الموجه (\mathcal{E}) ، نعتبر النقط $A(1,0,2)$ و $B(-1,1,1)$ و $C(3,2,0)$.

1. حدد مثلث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2. استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمة .

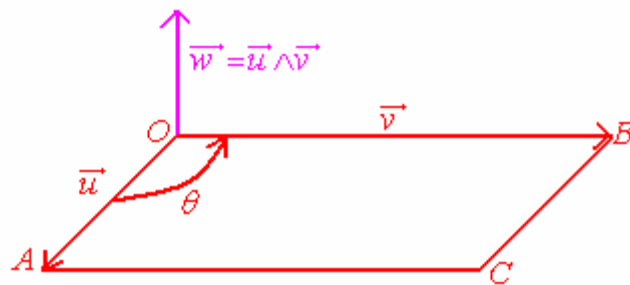
3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

IV. تطبيقات :

1. مساحة مثلث- مساحة متوازي الأضلاع : Aire d'un Triangle, d'un Parallélogramme :

في الفضاء (\mathcal{E}) ، نعتبر متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقا من المتجهتين \overrightarrow{OA} و \overrightarrow{OB} ؛ ولتكن S مساحته .

نعلم أن مساحة المثلث AOB هي :



$$s = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin(\theta)$$

$$s = \frac{1}{2} \|u\| \times \|v\| \times \sin(\theta)$$

$$s = \frac{1}{2} \|u \wedge v\|$$

ومنه فإن مساحة متوازي الأضلاع $OACB$ هي : $S = 2s = \|u \wedge v\|$.

خاصية 1 :

✓ مساحة مثلث ABC في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و

$$s = \frac{1}{2} \|AB \wedge AC\|$$

مباشر هي :

خاصية 2 :

✓ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ انطلاقاً من متجهتين غير منعدمتين u و v في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي :

$$S = \|u \wedge v\|$$

✓ مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ هي : $S = \|AB \wedge AD\|$

2. معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمة : خاصة :

ليكن (ABC) مستوى في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر.

لدينا $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منتظمة على المستوى (ABC) . إذن :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

مثال : في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر النقط

$$A(5,2,0) \text{ و } B(3,5,-1) \text{ و } C(-2,-3,1)$$

1. بين أن النقط A و B و C غير مستقيمة .

2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

3. تقاطع مستويين :

في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر المستويين :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0 \text{ و } (Q) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

لدينا : $\vec{n}(a,b,c)$ متجهة منتظمة على المستوى (P) و

$\vec{n}'(a',b',c')$ متجهة منتظمة على المستوى (Q) .

نفترض أن : $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$. إذن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

لتحديد نقطة من المستقيم (Δ) ، نستعمل معادلتين المستويين (P) و (Q) .

مثال : حدد تقاطع المستويين التاليين : $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ و $(Q) : 4x - 4y + 2z - 5 = 0$.

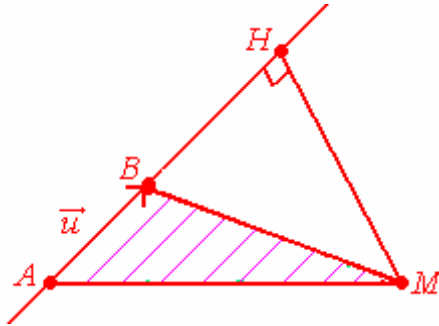
4. مسافة نقطة عن مستقيم :

في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيما $D(A, \vec{u})$ و نعتبر M نقطة مسقطها العمودي H على المستقيم $D(A, \vec{u})$.

مساحة المثلث ABM هي : $S = \frac{1}{2} AB \times HM$ ولدينا : $S = \frac{1}{2} \|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|$. إذن :

$AB \times HM = \|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|$ أي : $\|\vec{AB}\| \times HM = \|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|$ ومنه نستنتج أن :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = HM = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$



خاصية : المسافة بين نقطة M من الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و مستقيم $D(A, \vec{u})$ هي :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

مثال : في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، حدد المسافة بين

$$. (\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad / \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و النقطة } M(3, 2, -1) \quad \text{و المستقيم}$$

5. المسافة بين مستقيمين (إضافة) :

في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيمين غير مستوائيين $D(A, \vec{u})$ و $D(B, \vec{v})$. المسافة بين المستقيمين $D(A, \vec{u})$ و $D(B, \vec{v})$ هي :

$$d(D(A, \vec{u}), D(B, \vec{v})) = \frac{\|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

مثال : ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(1, 0, -1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(0, 1, 1)$. وليكن (D') المستقيم المار من النقطة $B(-1, 0, 0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{v}(1, 0, 2)$.

- بين أن المستقيمين (D) و (D') غير مستوائيين .
- أحسب المسافة بين المستقيمين (D) و (D') .

تمرين : بين أن : $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{U}_3^3 : \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \wedge \vec{v}) \vec{w}$



بالتوفيق إنشاء الله

