

الأستاذ : الحيان

الجداء المتجمهي

الثانية بكالوريا علوم تجريبية

Orientation de l'espace

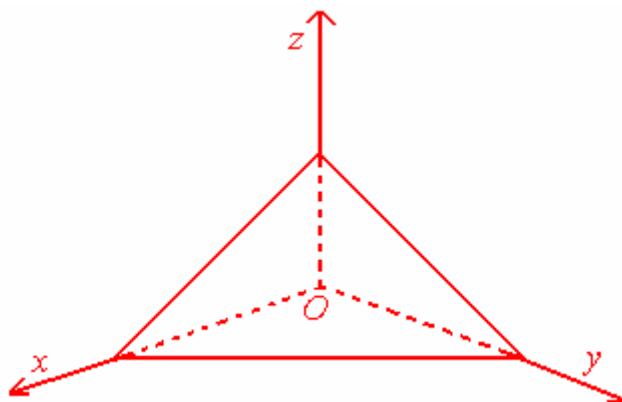
Tetraèdre :

-I توجيه الفضاء :

1. ثلاثي الأوجه :

تعريف :

ثلاثة أنصاف مستقيم في الفضاء (Ox) و (Oy) و (Oz) وغير مستوائية ، تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه ، نرمز له بالرمز (Ox, Oy, Oz) .
(Ox) و (Oy) و (Oz) تسمى أحرف ثلاثي الأوجه .

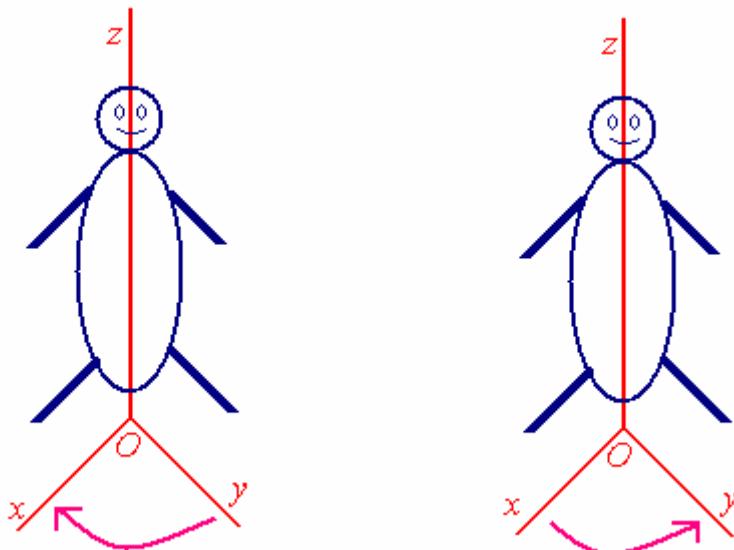


Le Bonhomme d'Ampère :

2. رجل أمبير :

تعريف :

رجل أمبير لثلاثي الأوجه (Ox, Oy, Oz) هو شخص خيالي محمول على الحرف (Oz) ، رجله في الأصل O ، ويرى الحرف (Ox) .
يوجد موضعان للحرف (Oy) بالنسبة لرجل أمبير :
الحرف (Oy) عن يساره .
الحرف (Oy) عن يمينه .



3. منحى ثلاثي الأوجه وتوجيه الفضاء :

اتفاق : لما يكون رجل أمبير على الحرف (Oz) ورجله في O وهو يرى الحرف (Oy) عن يساره ، نقول إن ثلاثي الأوجه (Ox, Oy, Oz) مباشر (أو موجب) .

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma :

بهذا نكون قد وجهنا الفضاء إلى صنفين :

هي صنف ثلاثي أوجه مباشر.

هي صنف ثلاثي أوجه غير مباشر.

4. معلم موجه في الفضاء :

. $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ معلم في الفضاء (\mathcal{E}) . نضع : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و نعتبر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

تعريف :



يكون $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلمًا مباشراً للفضاء (\mathcal{E}) إذا كان ثلاثي الأوجه (OI, OJ, OK) مباشراً.

Les Bases directes :

5. الأسس المباشرة :

ليكن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساساً للفضاء \mathcal{U} . ولتكن O نقطة من الفضاء (\mathcal{E}) .

إذا كان $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلمًا مباشراً للفضاء (\mathcal{E}) ، فإننا نقول إن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس مباشراً للفضاء \mathcal{U} .

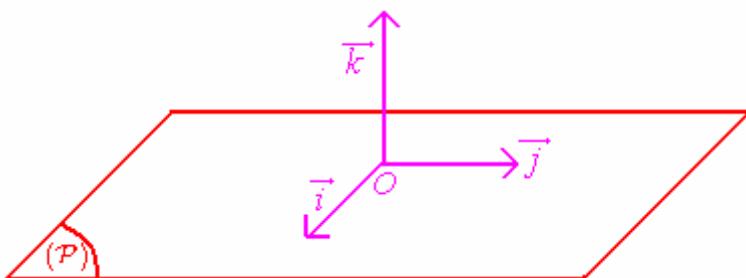
Orientation d'un Plan dans l'espace :

6. توجيه مستوى في الفضاء :

نعتبر (\mathcal{P}) مستوى في الفضاء (\mathcal{E}) ، و \vec{k} متوجهة واحدية منتظمة على المستوى (\mathcal{P}) .

من نقطة $O \in (\mathcal{P})$ ، ننشئ معلمًا متعامداً ممنظماً $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للفضاء (\mathcal{E}) .

يكون المعلم المتعامد الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) مباشراً في المستوى (\mathcal{P}) ، إذا كان المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشراً في الفضاء (\mathcal{E}) .



توجيه مستوى (\mathcal{P}) في الفضاء (\mathcal{E}) ، يتم بتوجيه متوجهة \vec{k} منتظمة عليه.

Produit Vectoriel de deux vecteurs :

II. الجداء المتجهي لمت hétiens :

1. تعريف :

في الفضاء الموجه ، نعتبر \vec{u} و \vec{v} متوجهتين ونعتبر O نقطة من الفضاء (\mathcal{E}) .

نعلم أن : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ / $\exists! (A, B) \in (\mathcal{E})^2$.

✓ إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين ، فإن الجداء المتجهي للمتوجهين \vec{u} و \vec{v} ، في هذا الترتيب ، هو المتوجه \vec{w} التي تتحقق ممثالتها \overrightarrow{OC} الشروط التالية :

$$(OC) \perp (OAB)$$

ثلاثي الأوجه $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ مباشر.

$$[A \hat{O} B] = |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OB}| \times \sin(\theta)$$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

✓ إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين ، فإن الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} ، في هذا الترتيب ، هو المتجهة المنعدمة $\vec{0}$

✓ نرمز للجاء المتجهي لمتجهتين \vec{u} و \vec{v} ، في هذا الترتيب ، بالرمز $\vec{u} \wedge \vec{v}$ أو $(\vec{u} \times \vec{v})$
ونقرأ : \vec{u} متجهي \vec{v} .

ملاحظتين : أ- لكل متجهتين غير منعدمتين \vec{u} و \vec{v} من الفضاء \mathcal{V}_3 ، لدينا :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta)$$

ب- إذا كان $\vec{0} \neq \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ، فإن المثلث $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساس مباشر للفضاء \mathcal{V}_3 .

مثال : أحسب $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ في كل من الحالتين التاليتين :

أ- $\|\vec{u}\| = 10$ و $\|\vec{v}\| = 2$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$

ب- $\|\vec{u}\| = 6$ و $\|\vec{v}\| = 6$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

2. **تطبيق :** بين متساوية Lagrange : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 : \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$

3. **خصائص :**

أ- $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$ و $\vec{w} \perp \vec{v}$. لكل $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}_3^3$ ، لدينا :

ب- **تخالف الجداء المتجهي :** $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}_3^2 : \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

ج- **خطانية الجداء المتجهي :** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{u} \wedge (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{u}) + \beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

لتكن \vec{u}_1 و \vec{u}_2 و \vec{v}_1 و \vec{v}_2 متغيرات من الفضاء \mathcal{V}_3 ، ولتكن $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

• $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$

• $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2)$

• $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

• $\vec{u} \wedge (\beta \vec{v}) = \beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

د- **انعدام الجداء المتجهي (شرط استقامية متجهتين) :**

خاصية : يكون الجداء المتجهي لمتجهتين \vec{u} و \vec{v} منعدما إذا وفقط إذا كانت المتجهتان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان.

برهان : لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء \mathcal{V}_3 . نضع : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. لدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta) = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \text{ أو } \|\vec{v}\| = 0 \text{ أو } \sin(\theta) = 0$$

() $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ لهم نفس الاتجاه

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ و \vec{v} مستقيمتان

نتيجة :

في الفضاء الموجه ، لدينا :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overline{0} \Leftrightarrow [A, B, C] \text{ نقط مستقيمية}$$

تطبيق : ليكن ABC مثلثا .

. 1. بين أن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$

. 2. استنتج علاقة الأجياب الثلاثة في المثلث ABC :

III. تحليلية الجداء المتجهي :

1. خاصية وتعريف :

ليكن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساسا متعامدا ممنظما للفضاء \mathcal{V} .

لتكن $\vec{v} \wedge \vec{u}$ متجهتين من الفضاء \mathcal{V} . لدينا :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

برهان : نعلم أن : $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ و $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ و $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ و $\vec{k} \wedge \vec{k} = \overline{0}$ و $\vec{j} \wedge \vec{j} = \overline{0}$ و $\vec{i} \wedge \vec{i} = \overline{0}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

وبالتالي فإن : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بالنسبة للأساس

تطبيق : في الفضاء الموجه (\mathcal{U}) ، نعتبر النقط $A(1,0,2)$ و $B(-1,1,1)$ و $C(3,2,0)$

1. حدد مثلاً إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2. استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

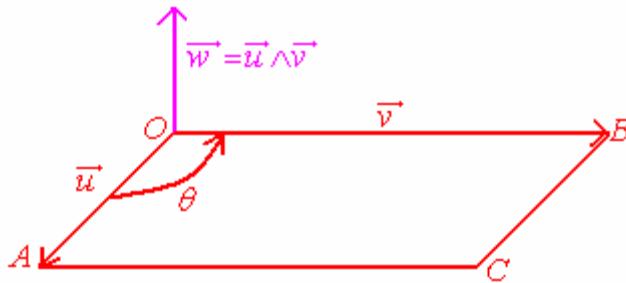
3. استنتاج معادلة ديكارتية لل المستوى (ABC) .

Applications :

IV. تطبيقات : 1. مساحة مثلث- مساحة متوازي الأضلاع:

في الفضاء (\mathcal{U}) ، نعتبر $OABC$ متوازي الأضلاع المنشأ انتلاقا من المتجهتين \overrightarrow{OA} و \overrightarrow{OB} ; ولتكن مساحتها .

نعلم أن مساحة المثلث AOB هي :



$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin(\theta) \\ s &= \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\theta) \\ s &= \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \end{aligned}$$

. $S = 2s = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$: ومنه فإن مساحة متوازي الأضلاع $OABC$ هي :

خاصية 1 :

✓ مساحة مثلث ABC في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و

$$. \quad S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad \text{مباشر هي :}$$

✓ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ انتلاقاً من متوجهين غير متعادلين \vec{u} و \vec{v} في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر هي :

$$. \quad S = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$$S = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| \quad \checkmark \text{ مساحة متوازي الأضلاع } ABCD \text{ هي :}$$

خاصية 2 :

2. معادلة مستوى معرف بثلاث نقاط غير مستقيمية :

خاصية :

ليكن (ABC) مستوى في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر.

لدينا $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ متوجة منتظمة على المستوى (ABC) . إذن :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

مثال : في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر النقط

$$. \quad C(-2, -3, 1) \text{ و } B(3, 5, -1) \text{ و } A(5, 2, 0)$$

1. بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

3. تقاطع مستويين :

في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر المستويين :

$$. \quad (Q) : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad (\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$$

لدينا : $\vec{n}(a, b, c)$ متوجة منتظمة على المستوى (\mathcal{P}) و

$\vec{n}'(a', b', c')$ متوجة منتظمة على المستوى (Q) .

نفترض أن : $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$. إذن (\mathcal{P}) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) موجه بالمتوجة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

لتحديد نقطة من المستقيم (Δ) ، نستعمل معادلتي المستويين (\mathcal{P}) و (Q) .

مثال : حدد تقاطع المستويين التاليين: $4x - 4y + 2z - 5 = 0$ و (\mathcal{P}) : $x + 2y - 2z + 3 = 0$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

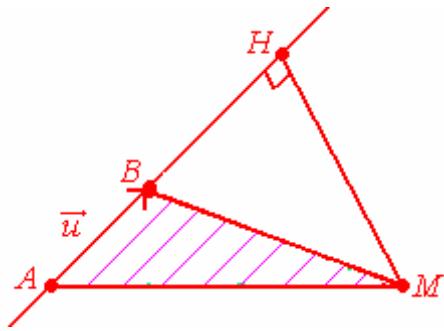
Distance d'un point à une droite :

4. مسافة نقطة عن مستقيم :

في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيما $D(A, \vec{u})$ و نعتبر M نقطة مسقطها العمودي H على المستقيم $D(A, \vec{u})$.

مساحة المثلث ABM هي : $S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|$ ولدينا : $S = \frac{1}{2} AB \times HM$. إذن : $\|\overrightarrow{AB}\| \times HM = \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|$ ومنه نستنتج أن :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$



المسافة بين نقطة M من الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) و مستقيم $D(A, \vec{u})$ هي :

$$d(M, D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

مثال : في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، حدد المسافة بين

$$\cdot (\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

النقطة $(3, 2, -1)$ و المستقيم $D(A, \vec{u})$

5. المسافة بين مستقيمين (إضافة) :

في الفضاء (\mathcal{E}) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر ، نعتبر مستقيمين غير

مستوائيين $D(B, \vec{v})$ و $D(A, \vec{u})$. المسافة بين المستقيمين $d(D(A, \vec{u}), D(B, \vec{v}))$ هي :

$$d(D(A, \vec{u}), D(B, \vec{v})) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

مثال : ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(1, 0, -1)$ والموجه بالتجهيز $\vec{u}(0, 1, 1)$.

وليكن (D') المستقيم المار من النقطة $B(-1, 0, 0)$ والموجه بالتجهيز $\vec{v}(1, 0, 2)$.

1. بين أن المستقيمين (D) و (D') غير مستوائيين .

2. أحسب المسافة بين المستقيمين (D) و (D') .

$$\boxed{\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}_3^3 : \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}}$$



بالتوفيق إنشاء الله

