تمارين : الحسابيات في $\mathbb{Z}$

.01

1. ما هو PGCD لعددين صحيحين طبيعيين متتابعين ؟ معللا جوابك .
2. باستعمال تأليفة خطية ل $2n+1$ و $3n+2$ استنتج $PGCD(3n+2,2n+1)$.
3. باستعمال خوارزمية إقليدس بين أن العددين 567 و 2854 أوليين فيما بينهما .
4. باستعمال حسابات السؤال السابق استنتج عددين صحيحين نسبيين x و y حيث $567x+2854y=1$.

.02

لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 5$ نعتبر العددين $a=n^3-n^2-12n$ و $b=2n^2-7n-4$.

1. بعد تعميل a و b بين أنهما يقبلان القسمة على $n-4$.
2. نضع $\alpha=2n+1$ و $\beta=n+3$ و $d=PGCD(\alpha,\beta)$.
   - أ. أوجد علاقة بين α و β غير مرتبطة ب n .
   - ب. بين أن : d قاسم ل 5 .
   - ج. بين أن α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .
3. بين أن : $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما .
4. ..
   - أ. حدد $PGCD(a,b)$ بدلالة n و ذلك تبعا لقيم n.
   - ب. تخقق على النتيجة بالنسبة ل $n=11$ ثم ل $n=12$.

.03

1. ثلاثة أعداد صحيح طبيعية متتابعة بين أن مجموع مكعباتها دائما يقبل القسمة على 9 .
2. أوجد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حيث $a\wedge b=13$ و $a+b=182$.

.04

1. n من $\mathbb{N}$ ؛ تبعا لقيم n أوجد باقي القسمة ل 5^n على 13 .
2. استنتج بأن $2007^{2015}-8$ يقبل القسمة على 13 .
3. بين أن : لكل n من $\mathbb{N}^*$ العدد $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .

.05

1. أحسب باقي القسمة الاقليدية ل 3^n على 7 مع من أجل $1\leq n\leq 6$.
2. بدون استعمال الترجع بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : 7 تقسم $3^{n+6}-3^n$. استنتج أن 3^{n+6} و 3^n لهما نفس الباقي بالقسمة على 7 .
3. ما هو باقي القسمة ل 3^{1000} على 7 ؟
4. بصفة عامة كيف نحصل على باقي القسمة ل 3^n على 7 لكل n من $\mathbb{N}$ ؟
5. نضع $\sum_{k=0}^{k=n-1}3^k=u_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$ لكل n من $\mathbb{N}$ و $n\geq 2$.

أ- بين أن $u_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$. ب – ما هي قيم n حيث u_n تقبل القسمة على 7 ؟ ج – ما هي القواسم الموجبة ل u_6 ؟

.06

.1 PGCD لعددين صحيحين طبيعيين متتابعين (معللا جوابك)

نعتبر n و $n+1$ عددين متتابعين و d قاسم موجب ل n و $n+1$ إذن d قاسم لفرقيهما أي d يقسم $(n+1)-n=1$

ومنه : $d=1$ و بالتالي $PGCD(n,n+1)=1$ (وهذا يذكرنا بالواجب الأول السؤال : استدل بالخلف على ما يلي :إذا كان العدد q يقسم العدد n إذن q لا يقسم $n+1$) .

ومنه : $PGCD(n,n+1)=1$

.2 باستعمال تأليفة خطية ل $2n+1$ و $3n+2$ استنتج $PGCD(3n+2,2n+1)$.

لنعتبر d قاسم مشترك ل $2n+1$ و $3n+2$.

إذن : $\left.\begin{array}{l} d\mid(3n+2) \\ d\mid(2n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow d\mid\left[2(3n+2)-3(2n+1)\right] \Rightarrow d\mid 1$ (تآلفية خطية ل $2n+1$ و $3n+2$)

ومنه : $PGCD(3n+2,2n+1)=1$

.3 باستعمال خوارزمية إقليدس بين أن العددين 567 و 2854 أوليين فيما بينهما .

طريقة تطبيق خوارزمية أقليديس لحساب $pgcd(a,b)$: مع : $a=567$ و $b=2854$ (109 عدد أولي) .

$$2854=\boxed{567}\times 5+\boxed{19} \quad (r_1=19)$$

$$\boxed{567}=\boxed{19}\times 29+\boxed{16} \quad (r_2=16)$$

$$\boxed{19}=\boxed{16}\times 1+\boxed{3} \quad (r_3=3)$$

$$\boxed{16}=\boxed{3}\times 5+\boxed{1} \quad (r_4=1) \quad ; \ (PGCD(2854,567)=1)$$

$$\boxed{3}=\boxed{1}\times 3+\boxed{0} \quad (r_5=0)$$

خلاصة : $PGCD(2854,567)=1$

.4 باستعمال حسابات السؤال السابق استنتج عددين صحيحين نسبيين x و y حيث $567x+2854y=5$.

طريقة تحديد معاملي بيزو

$$1 = 567\times 6 + 19\times(-179)$$
$$= 567\times 6 + \Big(\underbrace{2854 - 567\times 5}_{19}\Big)\times(-179)$$
$$= 567\times 901 + 2854\times(-179)$$

$$1 = 19\times(-5) + \Big(\underbrace{567 - 19\times 29}_{16}\Big)\times 6$$
$$= 567\times 6 + 19\times(-179)$$

$$1 = 16 - \Big(\underbrace{19 - 16\times 1}_{3}\Big)\times 5 = 19\times(-5) + 16\times 6$$
$$1 = 16 - 3\times 5$$

$a = 2854$ و $b = 567$

نضع :

$$2854 = \boxed{567}\times 5 + \boxed{19} \quad (r_1 = 19)$$
$$\boxed{567} = \boxed{19}\times 29 + \boxed{16} \quad (r_2 = 16)$$
$$\boxed{19} = \boxed{16}\times 1 + \boxed{3} \quad (r_3 = 3)$$
$$\boxed{16} = \boxed{3}\times 5 + \boxed{1} \quad (r_4 = 1)$$
$$\boxed{3} = \boxed{1}\times 3 + \boxed{0} \quad (r_5 = 0)$$

خلاصة : معاملي بيزو هما $x = 901$ و $y = -179$ أي $567\times 901 + 2854\times(-179) = 1$

07.

1. بعد تعميل a و b بين أنهما يقبلان القسمة على $n-4$.

لدينا :

- $a = n^3 - n^2 - 12n = n(n^2 - n - 12) = n(n^2 - 16 - n + 4) = n(n-4)(n+4-1) = n(n-4)(n+3)$

ومنه : $(n-4) \mid a$.

- $b = 2n^2 - 7n - 4 = 2n^2 - 32 - 7n + 28 = 2(n^2 - 16) - 7(n-4) = (n-4)[2(n+4) - 7] = (n-4)(2n+1)$

ومنه : $(n-4) \mid b$.

2. ..

أ. أوجد علاقة بين α و β غير مرتبطة ب n .

لدينا : $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ إذن : $\alpha = 2n+1 = 2n+6-5 = 2(n+3) - 5 = 2\beta - 5$

ومنه : علاقة بين α و β غير مرتبطة ب n هي : $\alpha = 2\beta - 5$.

ب. بين أن : d قاسم ل 5 .

من خلال :

- $d = PGCD(\alpha,\beta)$ إذن : $d \mid \alpha$ و $d \mid \beta$ ومنه : $d \mid (2\beta - \alpha)$ (1) (تأليفة خطية ل α و β)
- $\alpha = 2\beta - 5$ نحصل على $2\beta - \alpha = 5$ (2) .
- من خلال (1) و (2) نحصل على $d \mid 5$.

ومنه : $d \mid 5$. أي $d = 1$ أو $d = 5$ أو أيضا : $1 = d = PGCD(\alpha,\beta)$ أو $5 = d = PGCD(\alpha,\beta)$

ج. بين أن α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .

$\Rightarrow$ نبين الاستلزام المباشر :

- لدينا : $n-2$ مضاعف ل 5 أي $5\mid(n-2)$ ومنه : $5\mid((n-2)+5)$ أي $5\mid(n+3)$ ومنه : $5\mid\beta$.
- لدينا : $n-2$ مضاعف ل 5 أي $5\mid(n-2)$ ومنه : $5\mid2(n-2)$ ومنه $5\mid(2(n-2)+5)$ و منه : $5\mid(2n+1)$ أي $5\mid\alpha$

و بالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

$\Leftarrow$ نبين الاستلزام العكسي :

لدينا : α و β مضاعفين ل 5 ومنه $5\mid\alpha$ و $5\mid\beta$ إذن : $5\mid(\alpha-\beta)$ أي $5\mid(2n+1-(n+3))$ ومنه : $5\mid(n-2)$.

و بالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

ومنه : α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .

3. نبين أن : $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما .

لنعتبر δ قاسم مشترك موجب ل $2n+1$ و n إذن : $\delta\mid(2n+1)$ و $\delta\mid n$ ومنه $\delta\mid((2n+1)-n)$ (تأليفة خطية ل $2n+1$ و n)

و منه : $\delta\mid1$ إذن $\delta=1$ أي $1=PGCD(2n+1,n)$

ومنه : $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما .(أي

4. ..

أ. حدد $PGCD(a,b)$ بدلالة n و ذلك تبعا لقيم n.

لدينا : $a=n^3-n^2-12n=n(n-4)(n+3)$ و $b=2n^2-7n-4=(n-4)(2n+1)$.

ومنه :

$$\begin{aligned}PGCD(a,b)&=PGCD(n(n-4)(n+3),(n-4)(2n+1))\\&=(n-4)PGCD(n(n+3),(2n+1))\\&=(n-4)PGCD(n\beta,\alpha)\\&=(n-4)PGCD(\beta,\alpha)\qquad;\quad(n\wedge\alpha)=1\end{aligned}$$

من جهة أخرى : $1=d=PGCD(\alpha,\beta)$ أو $5=d=PGCD(\alpha,\beta)$

حالة : $5=d=PGCD(\alpha,\beta)$

حسب ما سبق : α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ مضاعف ل 5 .

أي : α و β مضاعفين ل 5 إذا وفقط إذا كان $n-2=5k$ مع $k\in\mathbb{N}$ (أي $n=5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$)

إذن : إذا كان $n=5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ فإن : $PGCD(a,b)=(n-4)\times5$

إذن : إذا كان $n\neq5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ فإن : $PGCD(a,b)=(n-4)\times1=n-4$

و منه :

إذا كان $n=5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ فإن : $PGCD(a,b)=(n-4)\times5$

إذا كان $n\neq5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$ فإن : $PGCD(a,b)=(n-4)\times1=n-4$

تحقق على النتيجة بالنسبة ل $n=11$ ثم ل $n=12$.

بالنسبة ل $n=11$ لدينا $n=11=2\times5+1$ إذن $n\neq5k+2$ و منه : $PGCD(a,b)=n-4$ أي

$PGCD(1078,161)=11-4=7$

بالنسبة ل $n=12$ لدينا $n=12=2\times5+2$ إذن $n=5k+2$ ومنه : $PGCD(a,b)=(n-4)\times5$ أي

$PGCD(1440,200)=(12-4)\times5=40$.

خلاصة :

- بالنسبة ل $n=11$ لدينا $PGCD(a,b)=PGCD(1078,161)=11-4=7$.
- بالنسبة ل $n=12$ لدينا $PGCD(a,b)=PGCD(1440,200)=(12-4)\times5=40$

08.

1. لنعتبر الأعداد الصحيحة الطبيعية المتتابعة التالية : n و $n+1$ و $n+2$

مكعباتها هي : n^3 و $(n+1)^3$ و $(n+2)^3$

ومنه مجموع مكعباتها هو : $(1)\quad n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=3n^3+9n^2+15n+9=9(n^2+1)+3n(n^2+5)$

لدينا : $9(n^2+1)$ يقبل القسمة على 9 أي $9(n^2+1)\equiv 0\ [9]\quad (2)$

إذن يكفي أن نبين أن : $3n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 9 أو أيضا نبين أن $n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 3 .

حالة 1 : $n\equiv 0\ [3]$ إذن $n(n^2+5)\equiv 0\ [3]$.

حالة 2 : $n\equiv 1\ [3]$ إذن $n^2\equiv 1\ [3]$ ومنه : $(n^2+5)\equiv 6\equiv 0\ [3]$ و بالتالي $n(n^2+5)\equiv 0\ [3]$.

حالة 3 : $n\equiv 2\ [3]$ إذن $n^2\equiv 4\equiv 1\ [3]$ ومنه : $(n^2+5)\equiv 6\equiv 0\ [3]$ و بالتالي $n(n^2+5)\equiv 0\ [3]$.

ومنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $n(n^2+5)\equiv 0\ [3]$ إذن $3n(n^2+5)\equiv 0\ [9]\quad (3)$

من خلال : (1) و (2) و (3) نحصل على $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\equiv 0\ [9]$.

خلاصة : مجموع مكعبات 3 أعداد صحيح طبيعية متتابعة دائما يقبل القسمة على 9 .

2. أوجد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حيث $a\wedge b=13$ و $a+b=182$

$$\left.\begin{matrix}a\wedge b=13\\ a+b=182\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}a=13a',b=13b',PGCD(a',b')=1\\ 13(a'+b')=182\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=13a',b=13b',PGCD(a',b')=1\\ a'+b'=14\end{cases}$$

بما أن : $PGCD(a',b')=1$ و $a'+b'=14$ إذن a' و b' لهما نفس الزوجية و بالضبط فرديين .

لتحديد a' و b' نعتبر الجدول التالي :

a'	1	3	5	~~7~~	9	11	13
b'	13	11	9	~~7~~	5	3	1
13a'	13	39	65	PGCD	117	143	169
13b'	169	143	117	$(7,7)\neq1$	65	39	13

من خلال الجدول الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حيث : $a\wedge b=13$ و $a+b=182$ هي :

$(13,169)$ و $(39,143)$ و $(65,117)$ و $(169,13)$ و $(143,39)$ و $(117,65)$.

09.

1. تبعا لقيم n نجد باقي القسمة ل 5^n على 13 .

لدينا : $5^1 \equiv 5 \quad [13]$ و $5^2 \equiv 12 \equiv -1 \quad [13]$ و منه $(-1)^2 \equiv 1 \quad [13]$ $\left(5^2\right)^2 \equiv$ أي $5^4 \equiv 1 \quad [13]$.

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ يكتب على شكل $n = 4k + r$ مع $r \in \{0,1,2,3\}$ و $k \in \mathbb{N}$.

إذن : $5^n = 5^{4k+r} = \left(5^4\right)^k \times 5^r$

$$5^4 \equiv 1 \quad [13] \Rightarrow \left(5^4\right)^k \equiv 1^k \quad [13]$$

إذن :
$$\Rightarrow \left(5^4\right)^k \times 5^r \equiv 1^k \times 5^r$$
$$\Rightarrow 5^{4k+r} \equiv 5^r \quad [13]$$
$$\Rightarrow 5^n \equiv 5^r \quad [13]$$

ومنه : $5^n \equiv 5^r \quad [13]$

ومنه:

- إذا كان : $r = 0$ فإن $5^n \equiv 5^0 \equiv 1 \quad [13]$.
- إذا كان : $r = 1$ فإن $5^n \equiv 5^5 \equiv 5 \quad [13]$.
- إذا كان : $r = 2$ فإن $5^n \equiv 5^2 \equiv 12 \quad [13]$.
- إذا كان : $r = 3$ فإن $5^n \equiv 5^3 \equiv 8 \quad [13]$.

خلاصة : باقي القسمة الممكن ل 5^n على 13 هم 1 أو 5 أو 12 أو 8 .

2. استنتج بأن $2007^{2015} - 8$ يقبل القسمة على 13 .

لدينا : $2007 = 154 \times 13 + 5$

إذن :

$$2007 \equiv 5 \quad [13] \Rightarrow 2007^{2015} \equiv 5^{2015} \quad [13]$$
$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv 5^{503\times4+3} \quad [13]$$
$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv \left(5^4\right)^{503} \times 5^3 \quad [13]$$
$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv (1)^{503} \times 5^3 \quad [13]$$
$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv 5^3 \quad [13]$$
$$\Rightarrow 2007^{2015} \equiv 8 \quad [13]$$
$$\Rightarrow 2007^{2015} - 8 \equiv 0 \quad [13]$$

ومنه : $2007^{2015} - 8$ يقبل القسمة على 13 .

3. بين أن : لكل n من $\mathbb{N}^*$ العدد $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .

لدينا : $31 \equiv 5 \quad [13]$ و $18 \equiv 5 \quad [13]$ إذن : $31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} \quad [13]$ و $18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} \equiv 5^{4(n-1)+3} \quad [13]$

إذن : $31^{4n+1} \equiv 5 \quad [13]$ و $18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} \equiv 5^{4k+3} \equiv 5^3 \equiv 8 \quad [13]$

إذن : $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5 + 8 \quad [13]$

إذن " $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 0 \quad [13]$

خلاصة : لكل n من $\mathbb{N}^*$ العدد $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .