Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Arithmétique dans Z
الحسابيات في Z

I . القسمة الأقليدية / قابلية القسمة / الموافقة : ammarimaths

خاصية القسمة الأقليدية:
مهما يكن العدد الصحيح النسبي a ، ومهما يكن العدد الصحيح الطبيعي ، غير المنعدم، b ، يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r ، بحيث :
$a = b.q + r$ و $0 \leq r \prec b$

قابلية القسمة:
a و b عددان صحيحان؛ نقول أن b يقسم a (أو a مضاعف ل b)؛ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح q بحيث:
$a = b.q$

الموافقة بترديد n:
نعتبر عددا طبيعيا غير منعدم n . a و b عددان صحيحان نسبيان؛ نقول أن العدد a موافق للعدد b بترديد n ، إذا وجد عدد صحيح k بحيث:
$a - b = k.n$
نكتب : $a \equiv b[modulo]$

II . خاصيات قابلية القسمة و الموافقة : ammarimaths-bm

قابلية القسمة:

$$a/a$$
$$(a/b \ \ et \ \ c/d) \Rightarrow ac/bd$$
$$(a/b \ \ et \ \ b/c) \Rightarrow a/c$$
$$(a/b \ \ et \ \ b/a) \Rightarrow |a| = |b|$$
$$(\delta/a \ \ et \ \ \delta/b) \Rightarrow (\forall(\alpha,\beta) \in Z^2) \ ; \ \delta/\alpha.a + \beta.b$$
$$a^n/b \Rightarrow a/b$$

الموافقة:

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow a - b = k.n \Leftrightarrow n/a - b$$
$$\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d[n] \\ a.c \equiv b.d[n] \end{cases}$$

III . القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر : ammarimaths-bm

القاسم المشترك الأكبر:
نرمز له : $d = pgdc(a,b) = a \wedge b$
يحقق القاسم المشترك الأكبر، الخاصيات التالية:

$$(d = a \wedge b) \Leftrightarrow (\exists(a',b') \in Z^2) \ ; \ \begin{cases} a = d.a' \\ b = d.b' \end{cases} \ et \ a' \wedge b' = 1$$

$$\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow d'/a \wedge b$$

المضاعف المشترك الأصغر:
يحقق المضاعف المشترك الأصغر، الخاصيات التالية:

$$(m = a \vee b) \Rightarrow \begin{cases} a/m \\ b/m \end{cases} ; \begin{cases} a/c \\ b/c \end{cases} \Rightarrow a \wedge b/c$$

خاصية مشتركة:
$$\forall(a,b) \in Z^2 ; (a \vee b).(a \wedge b) = |a.b|$$

IV . الأعداد الأولية فيما بينها / خاصيات : ammarimaths-bm:

الأعداد الأولية فيما بينها:	خاصيات أخرى:

Citation : « La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique »

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Arithmétique dans Z
الحسابيات في Z

نقول أن العددين a b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذاكان: pgcd (a,b)=1.

مبرهنة كوص:
$(c/a.b \text{ et } c\wedge a=1) \Rightarrow (c/b)$

$(a/c \text{ et } b/c \text{ et } a\wedge b=1) \Rightarrow (a.b/c)$
$(a\wedge b=1 \text{ et } a\wedge c=1) \Rightarrow (a\wedge b.c)=1$
$(a\wedge b=1) \Leftrightarrow \forall(m,n)\in IN^*xIN^*;\ (a^m\wedge b^n=1)$
$(a=b.q+r \text{ et } 0\le r\prec b) \Rightarrow (a\wedge b=r\wedge b)$

V . الأعداد الأولية / خاصيات :

ammarimaths-bm

يكون عدد صحيح، عددا أوليا إذا وفقط إذا كان يقبل قاسمين موجبين بالضبط 2، 3 ، 5، 7 ...العددان 1 و -1 ليسا أوليان.
مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية...

خاصيات: ليكن p عددا أوليا، لدينا:
$(p/a.b) \Rightarrow (p/a \text{ ou } p/b)$
$(p/a^n) \Rightarrow (p/a)$
$(p/a_1.a_2...a_n) \Leftrightarrow \exists i\in(1,2,...,n);\ (p/a_i)$
$(p/a)\Rightarrow p\wedge a=p \text{ et } (p \text{ ne divise pas } a)\Rightarrow p\wedge a=1$

I . خوارزمية أقليدس :

ammarimaths-bm

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين a و b ، بحيث:
a >b
نقسم العدد a (العدد الأكبر) على العدد b ونجد:
(1) : $a=b.q_0+r_0$ et $0\le r_0\prec b$
إذا كان $r_0=0$ ، فإن pgcg(a,b) = b
إذا كان $r_0 \# 0$ ، نقسم b على r_0 ، ونجد:
(2) : $b=r_0.q_1+r_1$ et $0\le r_1\prec r_0\prec b$
إذا كان $r_1=0$ ، فإن $pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=r_0$

إذا كان $r_1 \# 0$ ، نقسم r_0 على r_1 ، ونجد:
الخ.
بعد عدد محدود من العمليات نحصل على باقي منعدم (ذلك لأن متتالية البواقي هي متتالية تناقصية لأعداد صحيحة)
ليكن r_n آخر باقي غير منعدم ، يكون لدينا إذن:

$pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=...=pgcd(r_{n-1},r_n)=r_n$

II . تفكيك عدد صحيح الى جداء عوامل أولية :

ammarimaths-bm

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ومخالف للعدد1 ، يتفكك بشكل وحيد على شكل:
$n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$

بحيث تكون الأعداد pi أولية، والأعداد α_i صحيحة غير منعدمة.

III . مجموعة أصناف التكافؤ : Z/n.Z

ammarimaths-bm

علاقة التوافق:
$a\equiv b[n]\Leftrightarrow a-b=k.n\Leftrightarrow n/a-b$
هي علاقة تكافؤ في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية، منسجمة مع قانوني الجمع و الضرب:
$\begin{cases}a\equiv b[n]\\ c\equiv d[n]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c\equiv b+d[n]\\ a.c\equiv b.d[n]\end{cases}$
صنف تكافؤ العدد الصحيح النسبي x ، هو المجموعة المعرفة كما يلي:
$\alpha=\bar{x}=\{y\in Z/\ y\equiv x[\text{modulo n}]\}$

يرمز لمجموعة أصناف التكافؤ : Z/n.Z
$Z/n.Z=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},.....,\overline{n-2},\overline{n-1}\}$
يعرف الجمع والضرب في هذه المجموعة كما يلي:
$\begin{cases}\bar{a}+\bar{b}\equiv\overline{a+b}\\ \bar{a}.\bar{b}\equiv\overline{a.b}\end{cases}$
(Z/n.Z , + , x) حلقة واحدية تبادلية، بصفة عامة غير تكاملية.
إذا كان العدد n أوليا، فإن (Z/n.Z , + , x) يكون جسما.
$(\bar{a} \text{ inversible dans } Z/n.Z)\Leftrightarrow(a\wedge n=1)$

IV . نظمات العد : Z/n.Z

ammarimaths-bm

ليكن x عددا صحيحا أكبر من أو يساوي 2.
كل عدد صحيح b يمكن أن يكتب على الشكل :
$b=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+....+a_1.x+a_0$

نكتب:
(1) : $b=\overline{a_n a_{n-1}....a_1 a_0}^{(x)}$
ونقول أن هذه الكتابة هي الكتابة المختصرة للعدد b في

Citation : « La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique »

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Arithmétique dans Z
الحسابيات في Z

بحيث: $a_n \neq 0$ et $(\forall i \in [0,n])$; $a_i \in [0,n-1]$	نظمة العد الذي أساسه x .

V . تحديد القاسم المشترك الأكبر والمصاعف المشترك الأصغر لعددين :

ammarimaths-bm

نعتبر :

$$a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$$

التفكيك الى جداء عوامل أولية للعددينم a و b . نجد:

$$a \wedge b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\inf(\alpha_i, \beta_{i\varsigma})}$$

$$a \vee b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sup(\alpha_i, \beta_{i\varsigma})}$$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع