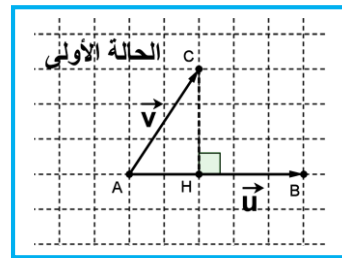
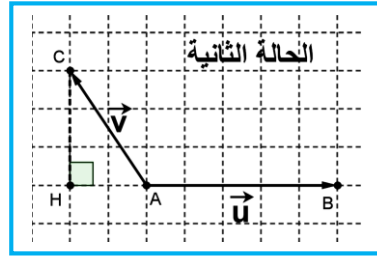




I. الجداء السلمي في الفضاء:



لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي V_3 و A و B و C نقط من الفضاء (صح) حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ الجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو :

- في الحالة 1 هو: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$
- في الحالة 2 هو: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

01. تعريف:

ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و H المسقط العمودي ل C على (AB) .

الجداء السلمي ل \vec{u} و \vec{v} و يرمز له ب $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ هو:

- /// العدد الحقيقي $AB \times AH$ إذا كان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AH} لهما نفس المنحى
- /// العدد الحقيقي $-AB \times AH$ إذا كان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AH} لهما منحيان \neq
- /// إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (الجداء السلمي منعدم)

02. ملاحظات :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 \geq 0 \quad \text{أ-}$$

ب- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ يسمى المربع السلمي ل \vec{u} ويرمز له ب: $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$.

ج- العدد الحقيقي الموجب: $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ يسمى منظم المتجهة \vec{u} ويرمز له ب: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \quad \text{د-}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{ه-} \quad \text{أو} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

03. خاصيات:

\vec{u} و \vec{v} و \vec{w} متجهات من V_3 و α من \mathbb{R} لدينا :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{أ-} \quad \text{(تماثلية الجداء السلمي).}$$

$$\text{(خطائية الجداء السلمي)} \quad \begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases} \quad \text{ب-}$$

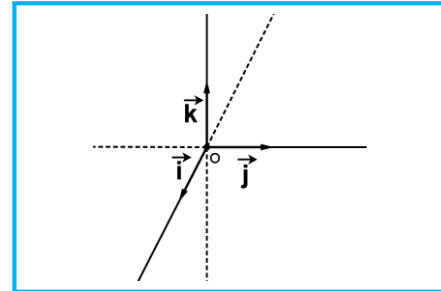
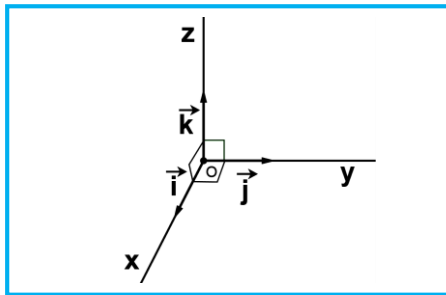
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad \text{ج-}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad \text{د-}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \quad \text{ه-}$$

II. معلم متعامد ممنظم – أساس متعامد ممنظم.

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 يكافئ \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} غير مستوائية من الفضاء $(\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0)$
- $\vec{0}$ من الفضاء؛ الرباعي $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم في الفضاء،
- نقول أن الفضاء منسوب إلى المعلم $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أو أيضا الفضاء مزود بالمعلم $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 هو أساس متعامد منظم يكافئ $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ و $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = 1$.
- وفي هذه الحالة المعلم $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم متعامد منظم



III. تحليلية الجداء السلمي في الفضاء

باقي فقرات الدرس المتبقية الفضاء نرمز له بـ (\mathcal{E}) و منسوب إلى م.م. م $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ متجهتين من الفضاء V_3 و نقطة من الفضاء (\mathcal{E}) و $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ و $C(x_C, y_C, z_C)$ نقط معلومة من (\mathcal{E})

01. خاصيات:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$ هو \vec{u} و \vec{v} الجداء السلمي لـ
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ هو : \vec{u} منظم المتجهة
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ هي: A و B المسافة بين

IV. مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$

01. خاصية:

نقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{u}(a, b, c)$ متجهة من الفضاء و k من \mathbb{R} ؛ مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث:

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ هي مستوى معادلته تكتب على شكل: $ax + by + cz + d = 0$.

02. مثال: $A(1, 1, 1)$ و $\vec{u}(0, 1, 0)$

نحدد (P) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء (\mathcal{E}) حيث: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0$$

خلاصة: المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته: $y = 1$



V. مستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمة عليه:

01. متجهة منظمة على مستوى:

أ- تعريف:

متجهة منظمة على مستوى (P) هي: كل متجهة \vec{n} غير منعدمة و يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P).

ب- نتيجة:

\vec{n} منظمة على المستوى (P) يكافئ أن: \vec{n} متعامدة مع متجهتين موجهتين \vec{u} و \vec{v} للمستوى (P).

02. خاصية:

أ- خاصية:

a و b و c و d من \mathbb{R} مع $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $ax+by+cz+d=0$ هي مستوى و المتجهة الغير المنعدم $\vec{n}(a,b,c)$ منظمة على هذا المستوى.

ب- مثال:

ماذا تمثل مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق ما يلي: $x+2y-z+4=0$.

مجموعة النقط هي المستوى (P) حيث $\vec{n}(1,2,-1)$ منظمة على (P) و المارة من $A(0,0,4)$ (لأن إحداثيات A تحقق المعادلة)

ج- ملحوظة:

$$\text{المستوى السابق نرسم له ب: } P(A, \vec{n}) \text{ أو } P\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$ هي المستوى (P) المار من A و متجهة منظمة على (P) هي \vec{u} (أي $P(A, \vec{n})$).

VI. مسافة نقطة عن مستوى:

01. تعريف:

(P) مستوى من الفضاء و A نقطة من الفضاء و النقطة H المسقط العمودي ل A على المستوى (P) المسافة AH تسمى المسافة

لنقطة A عن المستوى (P) ونرمز لها ب: $AH = d(A, (P))$.

02. خاصية:

A نقطة من الفضاء و (P) مستوى من الفضاء الذي معادلته هي: $ax+by+cz+d=0$ مسافة النقطة A عن المستوى (P)

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

03. مثال:

لنعتبر المستوى $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ و النقطة $A(0,0,m)$ و $m \in \mathbb{R}$

(1) حدد معادلة ديكرتية للمستوى (P).

(2) أحسب مسافة النقطة A عن المستوى (P).

(3) ماذا تمثل الحالة التي تكون فيها $d(A, (P)) = 0$.

VII. الوضع النسبية للمستقيمات و المستويات و التعامد

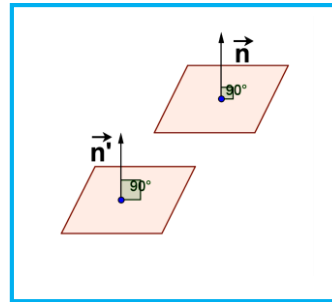
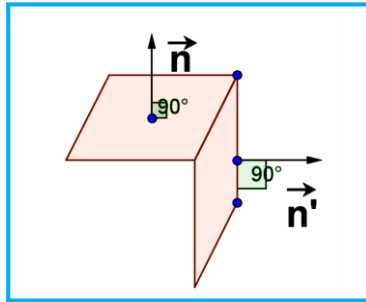
01. خاصية 1:

$(P_1): ax+by+cz+d=0$ و $(P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0$ مستويين من الفضاء و $\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n'}(a',b',c')$

منظمتين على (P_1) و (P_2) على التوالي

$(P_2) \parallel (P_1)$ يكافئ \vec{n} و $\vec{n'}$ مستقيمتين

$(P_2) \perp (P_1)$ يكافئ $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ (الجداء السلمي = 0)

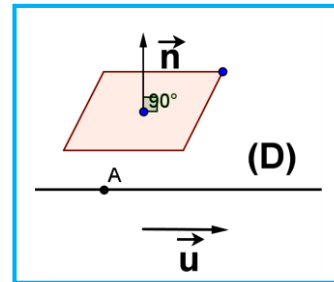
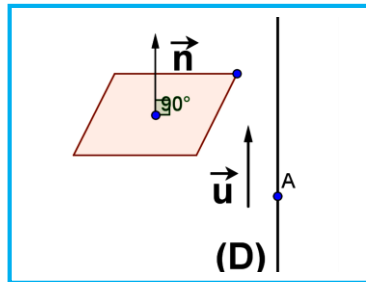


02. خاصية 2:

$P(A, \vec{n})$ مستوى من الفضاء و $D(A, \vec{u})$ مستقيم من الفضاء.

$(D) \parallel (P)$ يكافئ $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (الجداء السلمي = 0)

$(D) \perp (P)$ يكافئ \vec{u} و \vec{n} مستقيمتين.



دراسة تحليلية للفلكة:

VIII.

01. فلكة:

تعريف:

Ω نقطة من الفضاء و R عدد حقيقي موجب قطعاً ($R > 0$)

الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = R$ ونرمز لها ب: $S(\Omega, R)$.

A و B نقطتين من (S) حيث Ω منتصف القطعة $[AB]$ هذه القطعة تسمى قطر للفلكة (S) ونرمز للفلكة كذلك ب: $S_{[AB]}$.



02. معادلة ديكارتية لفلكة $S(\Omega, R)$:

خاصية:

معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega(a, b, c), R)$ هي :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2 \quad \text{أو أيضا}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad \text{مع } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

مثال:

معادلة ديكارتية للفلكة: $S(O, 1)$ هي: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

03. معادلة ديكارتية لفلكة $S_{[AB]}$:

خاصية:

A و **B** نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي الفلكة $S_{[AB]}$ التي معادلتها الديكارتية هي:

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

مثال:

A(0,1,0) و **B**(0,-1,0). حدد معادلة ديكارتية للفلكة $S_{[AB]}$

$$M(x, y, z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1; (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0)$$

04. دراسة مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ (و b, c, d من \mathbb{R})

خاصية:

a و **b** و **c** و **d** من \mathbb{R} حيث $R_2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

(E) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ هي:

$$\text{أ- الفلكة } (E) = S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right), R = \frac{\sqrt{R_2}}{2}\right)$$

إذا كان $R_2 > 0$.

$$\text{ب- } (E) = \left\{ \Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \right\} \text{ إذا كان } R_2 = 0$$

$$\text{ج- } (E) = \emptyset \text{ إذا كان } R_2 < 0.$$

IX. تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستقيم $D(A, \vec{u})$

01. خاصيات:

H المسقط العمودي ل Ω على (D) و $d = \Omega H$		
حالة 1: $(D) \cap (S) = \emptyset$	حالة 2: $(D) \cap (S) = \{A, B\}$	حالة 3: $(D) \cap (S) = \{H\}$
نقول: (D) خارج الفلكة (S)	نقول: (D) يقطع (S) في A و B	نقول: (D) مماس ل (S) في H
شرط: $d = \Omega H > R$	شرط: $d = \Omega H < R$	شرط: $d = \Omega H = R$

X. تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستوى $P(A, \vec{u}, \vec{v})$
01. الأوضاع النسبية - خاصيات:

H المسقط العمودي ل Ω على المستوى (P) و $d = \Omega H$		
حالة 1: $(P) \cap (S) = \emptyset$	حالة 2: $(P) \cap (S) = (C)$	حالة 3: $(P) \cap (S) = \{H\}$
نقول: (P) خارج الفلكة (S)	نقول: (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) مركزها H وشعاعها $R_C = \sqrt{R^2 - d^2}$	نقول: (P) مماس للفلكة في النقطة H حيث المستقيم $(H\Omega) \perp (P)$
شرط: $d = \Omega H > R$	شرط: $d = \Omega H < R$	شرط: $d = \Omega H = R$

02. خاصية:

$S(\Omega, R)$ فلكة و A من (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس ل (S) عند النقطة A وهو المستوى العمودي على المستقيم $\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$ أي: $M \in (P) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$ ومنه معادلة (P) هي $\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$