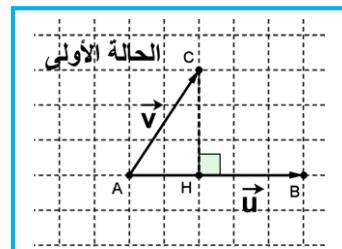
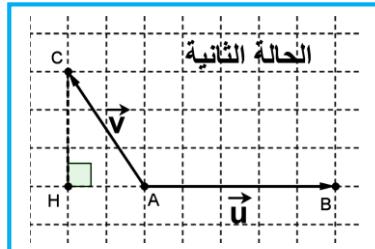




I. الجداء السلمي في الفضاء:



ل لكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي V , حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و A و B و C نقط من الفضاء (\mathcal{E}) .
السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو:

- $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH \quad \text{في الحالة 1 هو:} \quad -$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH \quad \text{في الحالة 2 هو:} \quad -$$

٠١. تعريف:

ليكن $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و H المسلط العمودي ل C على (AB) .

الجاء السلمي ل $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و يرمز له ب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ هو:

العدد الحقيقي $AB \times AH$ إذا كان \overrightarrow{AH} و \overrightarrow{AB} لهما نفس المنحى

العدد الحقيقي $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ - إذا كان \overrightarrow{AH} و \overrightarrow{AB} لهما منحنيان ≠

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (الجاء السلمي منعدم)

ملاحظات .02

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 \geq 0$$

الثانية: يسمى المربع السلمي لـ \vec{u} ويرمز له بـ \vec{u}^2 .

العدد الحقيقي الموجب: يسمى منظم المتجه \vec{u} ويرمز له بـ $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{أو} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{--- ٥}$$

. خاصیات:

\vec{u} و \vec{v} و \vec{w} متجهات من V_3 و α من \mathbb{R} لدينا:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ أ. تماثلية الجداء السلمي.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{خطانية الجداء السلمي } \left\{ (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \right. \quad \text{بـ}$$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}})^2 = \vec{\mathbf{u}}^2 + 2\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}^2$$

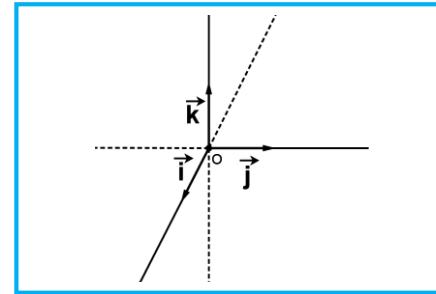
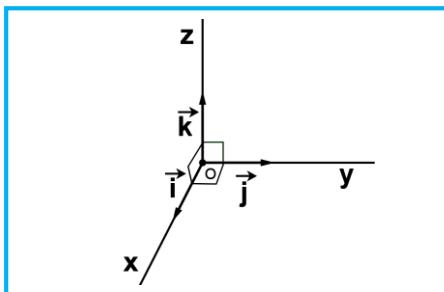
$$(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})^2 = \vec{\mathbf{u}}^2 - 2\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

II. معلم متعادم منظم – أساس متعادم منظم.



- // أساس في الفضاء V_3 يكافي \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} غير مستوائية من الفضاء $\left(\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0 \right)$
- // أخذ نقطة 0 من الفضاء ؛ الرباعي $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم في الفضاء، نقول أن الفضاء منسوب إلى المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أو أيضا الفضاء مزود بالمعلم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- . $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = 1$ هو أساس متعادم منظم يكافي $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ و في هذه الحالة المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم متعادم منظم



III. تحليلاً الجداء السلمي في الفضاء

باقي فقرات الدرس المتبقية الفضاء نرمز له ب (\mathcal{U}) و منسوب إلى م.م. م (x', y', z') و (x, y, z) . $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متجهتين من الفضاء V_3 و $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء (\mathcal{U}) و $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ و $C(x_C, y_C, z_C)$ نقط معلومة من (\mathcal{U}) خاصيات: 01

// **الجاء السلمي** ل \vec{u} و \vec{v} هو $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

// **منظم المتجهة** \vec{u} هو $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

// **المسافة بين A و B** هي: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

IV. مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$ خاصية: 01

A نقطة و $\vec{u}(a, b, c)$ متجهة من الفضاء و k من \mathbb{R} ؛ مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث:

$\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ هي مستوى معادلته تكتب على شكل: $ax + by + cz + d = 0$

مثال: $\vec{u}(0, 1, 0)$ و $\vec{u}(1, 1, 1)$ و $\vec{u}(1, 1, 0)$ مثلاً 02

نحدد (P) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

عندنا: $0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-1 = 0$$

خلاصة: المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته: $y = 1$

17

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 1 علوم رياضية
درس رقم

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته



الصفحة

V. مستوى معرف بنقطة ومتوجهة منتظمة عليه:
01. متوجهة منتظمة على مستوى:
أ- تعريف:

متوجهة منتظمة على مستوى (P) هي: كل متوجهة \vec{n} غير منعدمة و يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P).

ب- نتائج:

\vec{n} منتظمة على المستوى (P) يكفي أن: \vec{n} متعامدة مع متوجهين موجهتين \vec{u} و \vec{v} لل المستوى (P).

02. خاصية:

أ- خاصية:

a و b و c و d من \mathbb{R} مع $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ مجموعه النقاط ($M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $ax + by + cz + d = 0$) هي مستوى و المتوجهة الغير المنعدم $\vec{n}(a,b,c)$ منتظمه على هذا المستوى.

ب- مثال:

ماذا تمثل مجموعه النقاط ($M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق ما يلي: $x + 2y - z + 4 = 0$) هي مستوى و المارة من (P) حيث ($1, 2, -1$) و الماره من ($A(0,0,4)$) (إن إحداثيات A تتحقق المعادلة)

ج- ملحوظة:

المستوى السابق نرمز له بـ $P\left(A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

مجموعه النقاط ($M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$) هي المستوى (P) المار من A و متوجهة منتظمه على (P) هي \vec{u} (أي $P(A, \vec{n})$).

VI. مسافة نقطة عن مستوى :

01. تعريف:

(P) مستوى من الفضاء و A نقطة من الفضاء و النقطة H المسقط العمودي ل A على المستوى (P) المسافة AH تسمى المسافة للنقطة A عن المستوى (P) ونرمز لها بـ $AH = d(A, (P))$.

02. خاصية:

نقطة من الفضاء و (P) مستوى من الفضاء الذي معادله هي: $ax + by + cz + d = 0$ مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي:

$$AH = d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

03. مثال:

لنعتبر المستوى $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ و النقطة $A(0,0,m)$ و $m \in \mathbb{R}$ (1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

17

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: ١ علوم رياضية
درس رقم درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته



الصفحة

(2) أحسب مسافة النقطة A عن المستوى (P) .

(3) ماذا تمثل الحالة التي تكون فيها $d(A, (P)) = 0$.

VII. الوضع النسبي للمستقيمات و المستويات و التعامد

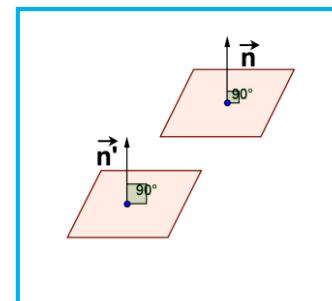
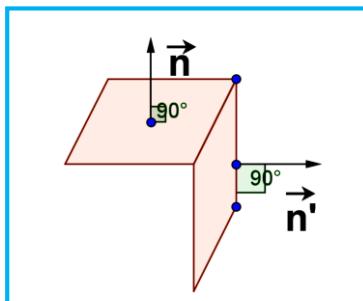
خاصية 1: 01.

$\vec{n}'(a', b', c')$ و $\vec{n}(a, b, c)$ مستويين من الفضاء و $(P_1) : ax + by + cz + d = 0$ و $(P_2) : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

منظمتين على (P_1) و (P_2) على التوالي

يكافى \vec{n} و \vec{n}' مستقيمتين $\parallel (P_1) \parallel (P_2)$

يكافى $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ (الجداء السلمي = 0) $\perp (P_2) \perp (P_1)$

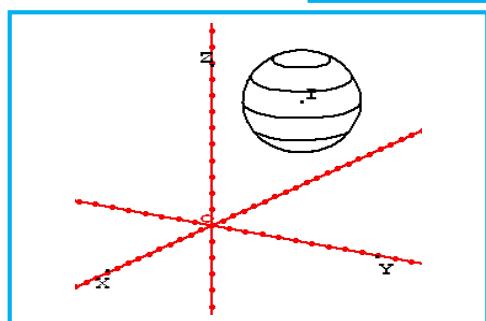
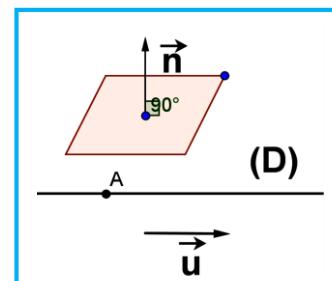
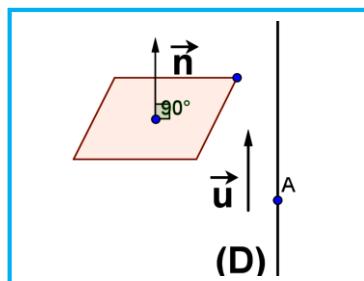


خاصية 2: 02.

$P(A, \vec{n})$ مستوى من الفضاء و $D(A, \vec{u})$ مستقيم من الفضاء.

يكافى $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (الجداء السلمي = 0) $\parallel (D) \parallel (P)$

يكافى \vec{u} مستقيمتين $\perp (D) \perp (P)$



دراسة تحليلية للفلكة:

VIII. فلكة: 01.

تعريف:

Ω نقطة من الفضاء و R عدد حقيقي موجب قطعا $(R > 0)$

الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تتحقق $\Omega M = R$ و نرمز لها ب:

و B نقطتين من (S) حيث Ω منتصف القطعة $[AB]$ هذه القطعة تسمى قطر للفلكة (S) و نرمز للفلكة كذلك ب:

$S_{[AB]}$



• 02. معادلة ديكارتية لفلكة $S(\Omega, R)$

• خاصية:

معادلة ديكارتية لفلكة $S(a, b, c, R)$ هي :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2 \quad //$$

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 \quad \text{مع} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad //$$

• مثال:

معادلة ديكارتية لفلكة: $S(O, 1)$ هي:

• 03. معادلة ديكارتية لفلكة $S_{[AB]}$

• خاصية:

و B نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي الفلكة $S_{[AB]}$ التي معادلتها الديكارتية هي:

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

• مثال:

$S_{[AB]}$. حدد معادلة ديكارتية لفلكة $A(0, 1, 0)$ و $B(0, -1, 0)$

$$M(x, y, z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1; (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0)$$

• 04. دراسة مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث: $M(x, y, z) = 0$ حيث $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ و a, b, c, d من \mathbb{R}

• خاصية:

$$R_2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4d \quad \text{حيث } R \in \mathbb{R}$$

مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تتحقق: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ هي (E)

$$(E) = S\left(\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right), R = \frac{\sqrt{R_2}}{2}\right) \quad \text{أ即 الفلكة}$$

إذا كان $R_2 > 0$.

$$R_2 = 0 \quad \text{إذا كان } (E) = \left\{ \Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \right\} \quad \text{أ即}$$

. $R_2 < 0 \quad (E) = \emptyset \quad \text{أ即}$

IX. تقاطع فلقة $S(\Omega, R)$ و مستقيم $D(A, \vec{u})$

• خاصيات:



المسقط العمودي ل Ω على (D) و $d = \Omega H$		
حالة 3 : $(D) \cap (S) = \{H\}$ نقول : (D) مماس ل (S) في H شرط : $d = \Omega H = R$	حالة 2 : $(D) \cap (S) = \{A, B\}$ نقول : (D) يقطع (S) في A و B شرط : $d = \Omega H < R$	حالة 1 : $(D) \cap (S) = \emptyset$ نقول : (D) خارج الفلكة (S) شرط : $d = \Omega H > R$

X. تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستوى $P(A, \vec{u}, \vec{v})$
 .01 الأوضاع النسبية - خاصيات:

المسقط العمودي ل Ω على المستوى (P) و $d = \Omega H$		
حالة 3 : $(D) \cap (S) = \{H\}$ نقول: (P) مماس للفلكة في النقطة H حيث $(H\Omega) \perp (P)$ شرط: $d = \Omega H = R$	حالة 2 : $(P) \cap (S) = \{C\}$ نقول: (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) مركزها H وشعاعها $R_C = \sqrt{R^2 - d^2}$ شرط: $d = \Omega H < R$	حالة 1 : $(P) \cap (S) = \emptyset$ نقول: (P) خارج الفلكة (S) شرط: $d = \Omega H > R$

.02 خاصية:

فلكة S(Ω, R) و A من (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس ل (S) عند النقطة A وهو المستوى العمودي على المستقيم $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ ومنه معادلة $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ أي : $(A\Omega) \perp (P)$