درس : التعداد

I. تمهيد :

01. نوع المسائل التي نريد حلها :

مثال 1 :

صندوق يحتوي على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5 .نسحب كرتين من الصندوق على الشكل التالي .

الحالة 1 : السحب للكرتين يكون بالتتابع وبإرجاع الكرة الأولى المسحوبة إلى الصندوق . (السحب بالتتابع و بإحلال طوله 2)

الحالة 2 : السحب للكرتين يكون بالتتابع وبدون إرجاع الكرة الأولى المسحوبة إلى الصندوق . (السحب بالتتابع وبدون بإحلال طوله 2)

الحالة 3 : السحب للكرتين يكون دفعة واحدة (أي في نفس الوقت أو أيضا في آن واحد) (السحب بتآني طوله 2)

1. ما هو عدد السحبات الممكنة ؟ (في كل حالة)
2. ما هو عدد السحبات حيث الكرتين تحملان رقم زوجي ؟ مجموع الرقمين يكون أصغر من 4 ؟........ (في كل حالة) .

مثال 2 :

A و B و C و D و E و 5 نقط من المستوى حيث كل 3 نقط من بين هذه النقط غير مستقيمية .

1. ما هو عدد المتجهات التي يمكن إنشاؤها و طرفيها نقطتين من بين هذه النقط تبعا للحالتين ؟
   أ – نقطتين.
   ب – نقطتين مختلفتين .
   ج - A و B و C و D و E تمثل الحروف الأولى ل 5 متسابقين في العدوي الريفي . نهتم بالرتب المحصل عليها من طرفهم بعد انتهاء السباق مع العلم أن أي رتبة لا تحتل إلا من طرف متسابق واحد و واحد فقط .
2.
   أ – ما هو عدد المستقيمات التي يمكن إنشاؤها و المارة من نقطتين مختلفتين من بين هذه النقط ؟
   ب - ما هو عدد المثلثات التي يمكن رسمها حيث رؤوسها هي هذه النقط ؟

02. الهدف من الدرس :

- الهدف من الدرس هو إعطاء الأدوات و المنهجية و المبرهنات لكي يكون الجواب واضح و صحيح و بكل سرعة .
- لكن هذه المبرهنات خاصة بدروس المتعلقة " بالمجموعات والتطبيقات "و لتطبيق هذه الدروس يجب تريض المسالة المطروحة علينا أي بتأويل ألفاظ النص إلى ألفاظ : المجموعات – الأجزاء – الأزواج - المتلوثات – و بصفة عامة p – uplets - التطبيقات – التطبيقات الشمولية – التطبيقات التباينية – التطبيقات التقابلية ....

II. مجموعة منتهية - رئيسي مجموعة :

01. تعريف :

> E مجموعة و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .
> إذا كان عدد عناصر المجموعة E هو n عنصر نقول إن المجموعة E هي مجموعة منتهية .
> العدد n يسمى رئيسي المجموعة E . و نرمز له ب : $cardE = n$.

02. أمثلة :

$E = \{a,b,c,f\}$ مجموعة منتهية و $cardE = 4$ $card\varnothing = 0$. أما المجموعات $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{R}$ أو $[0,1[$ .. فهي غير منتهية.

03. مجموعتان متقادرتان: Ensembles équipotents

1- تعريف:

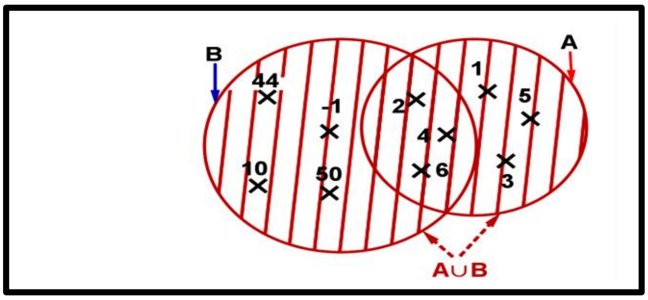
> A و B مجموعتان منتهيتان. إذا وجد تطبيق تقابلي بين A و B نقول إن المجموعتان A و B متقادرتان .

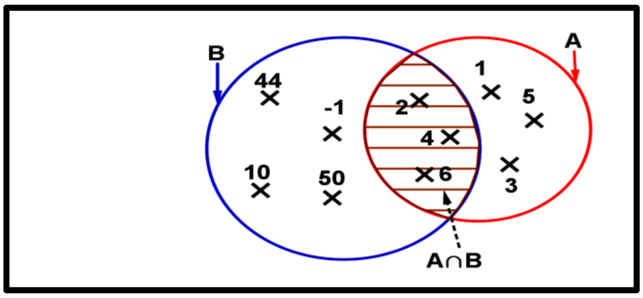
2- خاصية :

> A و B مجموعتان منتهيتان. A و B متقادرتان إذا وفقط إذا كان $cardA = cardB$

04. العمليات بين المجموعات المنتهية و رئيسي: (A و B مجموعتان منتهيتان حيث: $cardA = p$ و $cardB = n$)

1- رئيسي التقاطع و الاتحاد:





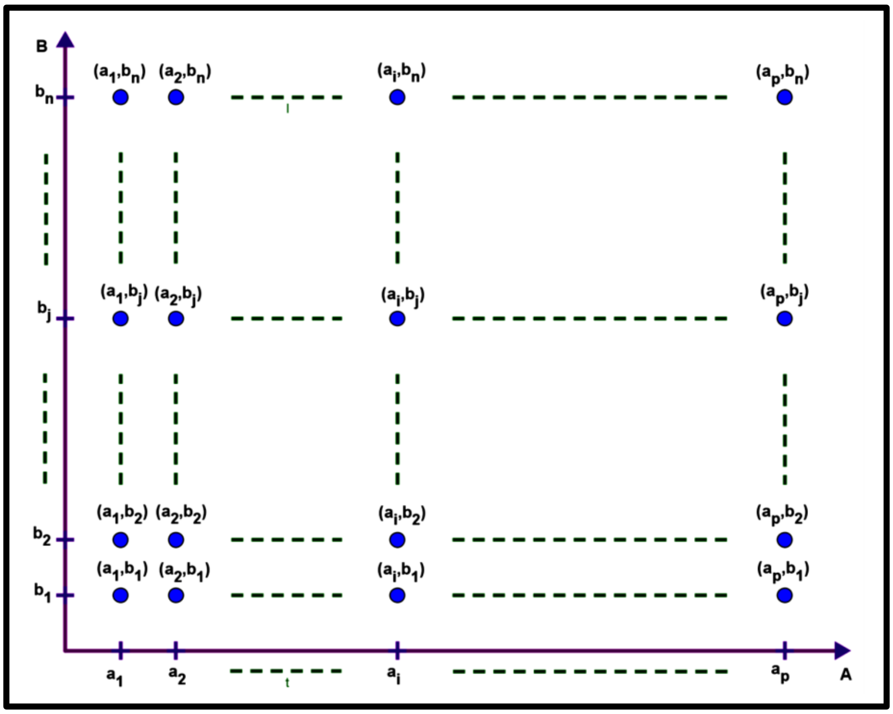
- A و B مجموعتان منفصلتان $(A \cap B = \varnothing)$. لدينا : $cardA \cap B = cardA + cardB$
- بصفة عامة: $cardA \cap B = cardA + cardB - cardA \cap B$

2- رئيسي الجداء الديكارتي :

- A و B مجموعتان منتهيتان وغير فارغتان مع $cardA = p$ و $cardB = n$ لدينا: $cardA \times B = cardA \times cardB$.
- بصفة عامة :

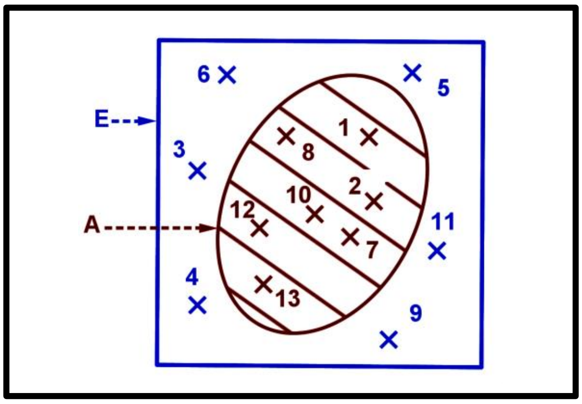
E_1 ; E_2 ;⋯ و E_p مجموعات منتهية و غير فارغة لدينا: $cardE_1 \times E_2 \times \cdots E_p = cardE_1 \times cardE_2 \times \cdots \times cardE_p$.

حالة خاصة: $E_1 = E_2 = \cdots = E_p = E$ إذن: $cardE^p = (cardE)^p$



3- رئيسي متمم جزء A في E :

لدينا: $C_E^A = \overline{A} = E \setminus A$ مع : $card\overline{A} = cardE - cardA$



III. المبدأ الأساسي للتعداد :

01. تمهيد :

لنعتبر الأرقام التالية : 3 و 4 و5

نبحث عن عدد الأعداد التي يتم تكوينها من رقمين مختلفين من بين الأرقام السابقة .

طريقة " عفوية " : يمكن أن نجد الأعداد التالية :

34 –53 – 43 – 35 - 45 – 54 إذن هناك 6 أعداد

طريقة أخرى :

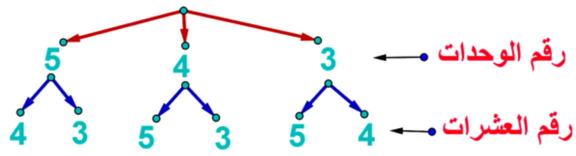
لدينا كل عدد متكون من رقمين يكتب على شكل ba

رقم a يمثل الوحدات ؛ رقم b يمثل العشرات

- الاختيار الأول يكون لرقم الوحدات a عدد الكيفيات لاختياره هو 3.
- الاختيار الثاني يكون لرقم العشرات b عدد الكيفيات لاختياره هو 2.
- عدد الأعداد هي 2×3

و هذه الكيفيات يمكن تمثيلها على الشكل التالي ويسمى شجرة الإمكانيات.

شجرة الإمكانيات
لكتابة الأعداد المتكونة من عددين مختلفين
من بين الأعداد 3 و 4 و 5



الأعداد المحصل عليها هي : 43 53 34 54 35 45

- الاختيار الأول: Premier choix .
- عدد الكيفيات : nombres des manières.
- شجرة الإمكانيات : arbre des cas

02. مبدأ الجداء

نعتبر تجربة تشمل p اختيارا. مع $\left(p\in\{1,2,3,....\}\right)$

- إذا كان الاختيار الأول يتم ب : n_1 كيفية مختلفة.
- إذا كان الاختيار الثاني يتم ب : n_2 كيفية مختلفة.
- إذا كان الاختيار الثالث يتم ب : n_3 كيفية مختلفة
- ....
- إذا كان الاختيار الذي رقمه p يتم ب : n_p كيفية مختلفة.

فإن عدد الكيفيات التي يتم بها ال p اختيارات هو $n_1\times n_2\times n_3\times...\times n_p$

03. مثال:

نرمي نردا (له 6 وجوه) مرتين متتاليتين .

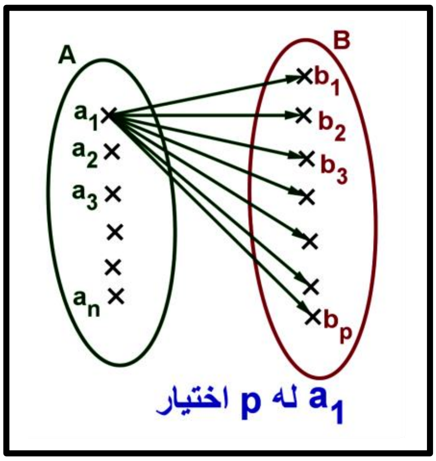
كل نتيجة متكونة من نتيجة الرمية الأولى ثم من بعد ذلك نتيجة الرمية الثانية تسمى نتيجة ممكنة أو إمكانية

1. حدد عدد النتائج الممكنة.
   - الرمية الأولى تعطي 6 اختيارات (6 نتائج أو 6 حالات).
   - الرمية الثانية تعطي 6 اختيارات (6 نتائج أو 6 حالات).
   - عدد النتائج الممكنة بعد رميتين هو $6\times6=36$
2. حدد عدد النتائج الممكنة حيث في الرمية الأولى نحصل على عدد زوجي .
   - في الرمية الأولى هناك 3 اختيارات (نتائج ممكنة).
   - في الرمية الثانية هناك 6 اختيارات (نتائج ممكنة).
   - ومنه : عدد النتائج الممكنة هو $3\times6=18$

IV. عدد التطبيقات من مجموعة E نحو مجموعة F (E و F منتهيتان وغير فارغتين)

01. نشاط :

A و B مجموعتان منتهيتان وغير فارغتين. نريد تحديد عدد التطبيقات من مجموعة A نحو مجموعة B مع $cardA = n$ و $cardB = p$ نضع $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_p\}$.



- نأخذ a_1 من A له p اختيار كصورة من B .
- نأخذ a_2 من A له p اختيار كصورة من B .
- ....
- ....
- نأخذ a_n من A له p اختيار كصورة من B .

ومنه : عدد التطبيقات من A نحو B هو :

$$\underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n} = p^n = (cardB)^{cardA}$$

02. خاصية :

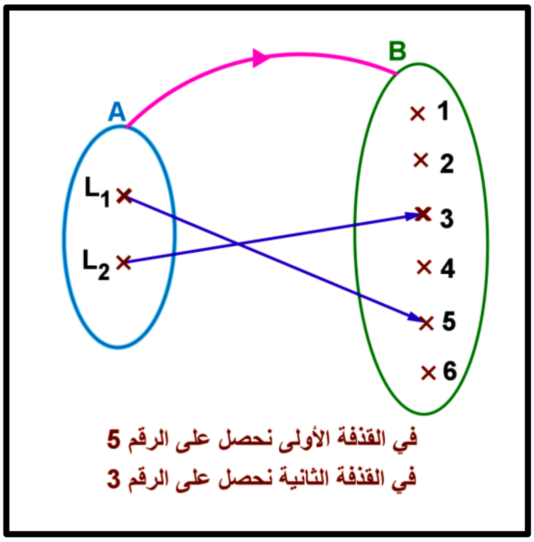
A و B مجموعتان منتهيتان وغير فارغتين عدد التطبيقات من A نحو B هو : $(cardB)^{cardA}$

03. مثال 1 :

نرمي نردا مرتين متتاليتين .

كل نتيجة متكونة من نتيجة الرمية الأولى ثم من بعد ذلك نتيجة الرمية الثانية تسمى نتيجة ممكنة أو إمكانية

3. حدد عدد النتائج الممكنة.
   - الرمية الأولى تعطي 6 اختيارات (6 نتائج أو 6 حالات).
   - الرمية الثانية تعطي 6 اختيارات (6 نتائج أو 6 حالات).
   - عدد النتائج الممكنة بعد رميتين هو $6 \times 6 = 36$
4. حدد عدد النتائج الممكنة حيث في الرمية الأولى نحصل على عدد زوجي .
   - في الرمية الأولى هناك 3 اختيارات (نتائج ممكنة).
   - في الرمية الثانية هناك 6 اختيارات (نتائج ممكنة).
   - ومنه : عدد النتائج الممكنة هو $3 \times 6 = 18$



طريقة ثانية :

نعتبر المجموعتين $A = \{L_1, L_2\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

مع L_1 القذفة الأولى L_2 القذفة الثانية.

عندما نقذف النرد في المرة الأولى يعطي مثلا 5 و القذفة الثانية تعطي 3 .

هذه النتيجة المحصل عليها بعد الرميتين تمثل التطبيق التالي .

و منه كل نتيجة محصل عليها بعد القذفتين تمثل تطبيق من A نحو B .

بالتالي عدد النتائج المحصل عليها هو عدد التطبيقات من A نحو B .

خلاصة : عدد النتائج المحصل عليها هو : $(cardB)^{cardA} = 6^2 = 36$.

04. مثال 2:

لقطعة نقود وجهين : ظهر القطعة نرمز له ب: P (PILE)؛ وجه القطعة الآخر نرمز له ب: F (face)

نرمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية (عندما نكتب أن النتيجة كانت: PPF نقصد أن القذفة الأولى أعطت F و القذفة 2 أعطت P والقذفة 3 أعطت P).

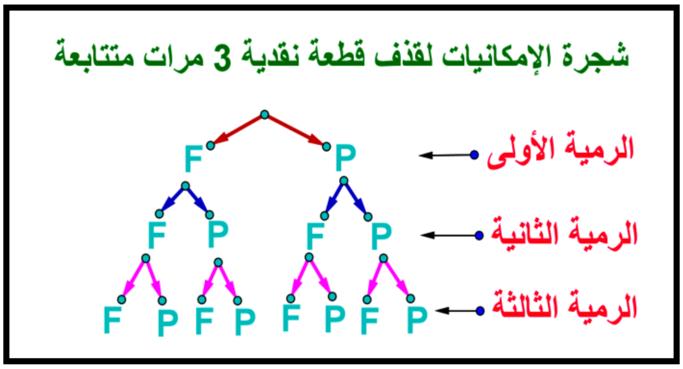
حدد عدد النتائج الممكنة . (أعط الجواب)

جواب: عند رمينا للقطعة النقود ثلاث مرات متتالية لدينا:

- الرمية الأولى تعطي : نتيجتين مختلفتين
- ولكل نتيجة للرمية الأولى هناك نتيجتين للرمية الثانية.
- و لكل نتيجة للرمية الثانية هناك نتيجتين للرمية الثالثة .

إذن سيكون عدد نتائج بعد الرمية الثالثة هو $2\times2\times2=8$

ملحوظة: هذه التجربة يمكن تمثيلها في التمثيل التالي يسمى شجرة الإمكانيات.



V. الترتيبات بدون تكرار:

01. ترتيبة (مثال) :

سباق في العدو الريفي جرى بين 4 عدائين A و B و C و D
بعد انتهاء السباق كان توزيع جائزتين فقط كالتالي 50 000 dh للرتبة الأولى و 10 000 dh للرتبة الثانية المحصل عليها من طرف العدائين مع العلم أن أي رتبة لا يمكن أن يحتلها أكثر من عداء .

- أعط حالة لتوزيع الجائزتين على العدائين الأربعة.

1- جواب :

- نعطي حالة:

توزيع الجائزة الأولى على العداء D و الجائزة الثانية على B نمثلها باختصار ب $\begin{matrix}2 & 1\\ B & D\end{matrix}$ أو باختصار ب DB . وهذه النتيجة ليست كالنتيجة BD المحصل عليها بعد انتهاء السباق .

2- مفردات :

كل نتيجة محصل عليه بعد انتهاء السباق تسمى تربية بدون تكرار لعنصرين من بين 4 عناصر

3- تعريف :

لتكن مجموعة تحتوي على n عنصر مع $\left(n\in\{1,2,3,....\}\right)$
ليكن p عددا صحيحا طبيعيا حيث $1\le p\le n$
كل ترتيبة ل p عنصر مختار من بين n عنصر يسمى ترتيبة بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر .

4- ملحوظة:

- لسحب كرتين (أو 3 كرات ..) بالتتابع وبدون إحلال (أي بدون إرجاج الكرة المسحوبة إلى الصندوق) يحتوي على n كرة. كل سحبة تمثل ترتيبة ل 2 من بين n (أو 3 من بين n ..).
- $n\in\mathbb{N}^*$ العدد : $1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$ يرمز له ب: $n!$ إذن : $n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$ ويقرأ : n عاملي.
- مثال : $3!=1\times2\times3=6$
- نضع : $1!=1$ و $0!=1$.

02. عدد الترتيبات :

1- خاصية:

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n عنصر (مع $1\le p\le n$) هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له بالرمز A_n^p حيث :

$$A_n^p=\underbrace{n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}_{p}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

2- أمثلة:

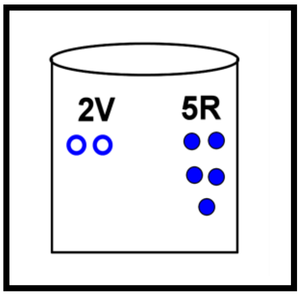
مثال 1: نحسب: $A_3^2=3\times2=6$ (هناك عاملين) . نحسب $A_5^3=5\times4\times3=60$ (هناك 3 عوامل).

مثال 2 :

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و2 من اللون الأخضر . نسحب عشوائيا وبتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق (أي بدون إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق).

1- ما هو عدد السحبات الممكنة

2- ما هو عدد السحبات التي تكون فيها الكرتين من اللون الأحمر



زر الآلة الحاسبة

nPr

- **جواب:**
- **الطريقة الأولى:**

1) عدد السحبات الممكنة

- الكرة الأولى المسحوبة لها 7 اختيارات
- الكرة الثانية المسحوبة لها 6 اختيارات (لإن الكرة الأولى تبقى خارج الصندوق)

إذن عدد السحبات الممكنة هو $7\times6=42$

- **الطريقة الثانية:**

كل سحبة لكرتين بتتابع و بدون إحلال من بين 7 كرات يمثل ترتيبة لـ2 من بين 7 ؛ إذن عدد السحبات هو عدد الترتيبات لـ2 من بين 7.

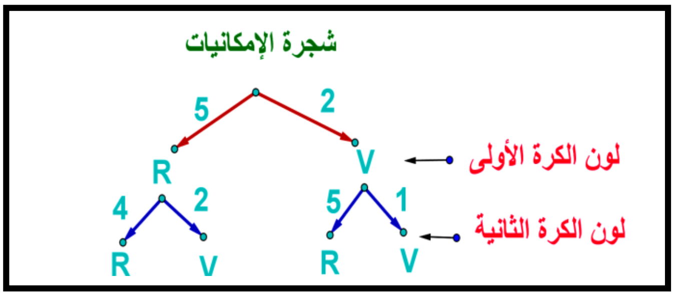
ومنه عدد السحبات : $A_7^2=\frac{7!}{(7-2)!}=\frac{7!}{5!}=7\times6=42$

2) عدد السحبات التي تكون فيها الكرتين من اللون الأحمر

- الكرة الأولى المسحوبة حمراء لها 5 اختيارات .
- الكرة الثانية المسحوبة حمراء لها 4 اختيارات (لإن الكرة الأولى المسحوبة كانت حمراء)

إذن عدد السحبات الممكنة الكرتين من اللون أحمر $5\times4=20$

ملحوظة : يمكن استعمال شجرة الإمكانات .



3- ملاحظات :

- $A_n^1=\frac{n!}{(n-1)!}=n$ و $A_n^0=\frac{n!}{(n-0)!}=1$ و $A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1=n!$

VI. التبديلات :

حالة خاصة بالنسبة لترتيبات: ترتيب n عنصر من بين n عنصر.

1- نشاط :

سباق في العدو الريفي جرى بين 4 عدائين : A و B و C و D.
نهتم بالرتب المحصل عليه من طرف العدائين بعد انتهاء السباق مع العلم أن أي رتبة لا يمكن أن يحتلها أكثر من عداء .
لنأخذ النتيجتين التاليتين : DABC ثم CBDA .. ماذا حدث لرتب المتسابقين الأربعة بالنسبة للنتيجتين ؟

2- تعريف:

> إذا رتبنا n عنصر من بين n عنصر (أي $p=n$) هذه الترتيبة تسمى تبديلة لـ n عنصر .

3- خاصية:

> عدد تبديلات لـ n عنصر هو العدد $n!$ مع $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$

4- مثال :

سباق في العدو الريفي جرى بين 4 عدائين A و B و C و D .
ما هي النتائج المحصل عليها بعد انتهاء السباق مع العلم أن أي رتبة لا يمكن أن يحتلها أكثر من عداء .

جواب:

كل نتيجة نحصل عليها بعد السباق تمثل تبديلة لـ 4 .

إذن عدد النتائج المحصل عليها بعد إجراء السباق هي عدد التبديلات لـ 4 . ومنه عدد النتائج هو $4!=1\times2\times3\times4=24$

VII. التأليفات :

01. تأليفة :

1- مثال :

لنعتبر المجموعة الآتية : $E=\{a,b,c,d\}$. نبحث عن عدد الأجزاء التي تحتوي على عنصرين من E.

الأجزاء هي: $\{a,b\}$ و $\{a,c\}$ و $\{a,d\}$ و $\{b,c\}$ و $\{b,d\}$ و $\{c,d\}$ إذن هناك 6 أجزاء ،

3- مفردات : كل جزء يسمى تأليفة لعنصرين من بين أربعة عناصر

3- ملحوظة :

- الجزء $\{a,b\}=\{b,a\}$ إذن الترتيب غير مهم في التأليفة.
- لسحب كرتين (أو 3 كرات ...) و في آن واحد من الصندوق (أي دفعة واحدة) يحتوي على n كرة. كل سحبة تمثل تأليفة ل 2 من بين n (أو 3 من بين n ...)

4- تعريف :

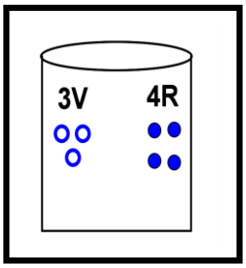
لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر مع $(n\in\{1,2,3,....\})$
كل جزء من E يحتوي على p عنصر $(p\leq n)$ يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر.

02. عدد التأليفات :

1- خاصية:

عدد التأليفات ل p $(p\in\{0,1,2,3,.....\})$ عنصر من بين n عنصر هو العدد الصحيح الطبيعي الذي نرمز له ب :

$$C_n^p=\frac{A_n^p}{p!}=\frac{n!}{(n-p)\times p!}=\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}^{p}}{1\times2\times3\times\cdots\times p}$$



2- مثال : $C_n^p=\frac{n!}{(n-p)!\times p!}$ $\quad C_7^3=\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}=35$

3- ملحوظة: $C_n^1=n$ و $C_n^n=1$ و $C_n^0=1$

4- مثال : يحتوي كيس على 4 كرات حمراء R و 3 كرات من اللون الأخضر V .
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1- ما هو عدد السحبات الممكنة
2- ما هو عدد السحبات حيث الكرات كلها حمراء .
3- ما هو عدد السحبات حيث نحصل على كرة واحدة فقط حمراء من بين الكرات 3 المسحوبة .

- **جواب:**

1- $C_7^3=35$. (2 $C_4^3=4$. (3 $C_4^1\times C_3^2=4\times3$.

زر الآلة الحاسبة
nCr

VIII. حدانية نيوتن : BINOMES DE NEWTON

1- خاصيات معاملات حدانية: n و p من $\mathbb{N}$ حيث $0\leq p\leq n$.

- تماثلية: $C_n^p=C_n^{n-p}$. (بين ذلك) . نتائج : $C_n^0=C_n^n=1$ و $C_n^1=C_n^{n-1}=n$.

مثال : عدد كيفية اختيار ممثلين لقسم متكون ن 40 تلميذ يساوي عدد كيفية اختيار 38 تلميذ من بين 40 تلميذ.

- علاقة باسكال: relation de Pascal : $C_n^p+C_n^{p+1}=C_{n+1}^{p+1}$ مع n و p من $\mathbb{N}$ حيث $0\leq p\leq n-1$.

(بين على ذلك بالترجع)

2- مثلث باسكال : triangle de Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...	p	p+1	....	n−1	n	n+1
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	$\boxed{4}$ +	$\boxed{6}$	4	1									
5	1	5	$\boxed{10}$	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
⋮								1						
p									1					
p+1										1				
⋮											1			
n−1										1		1		
n									C_n^p +	C_n^{p+1}			1	
n+1										C_{n+1}^{p+1}				1

3- حدانية نيوتن :

خاصية:

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i} b^i$

4- تطبيق:

- أحسب : $(1+1)^n$ بطريقتين مختلفتين :

لدينا : $C_n^0 + C_n^1 + ...C_n^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i 1^{n-i} 1^i = (1+1)^n = 2^n$.

ومنه : $\sum_{i=0}^{i=n} C_n^i = C_n^0 + C_n^1 + ...C_n^n = 2^n$

- $card(\mathscr{P}(E))$: عدد الأجزاء التي لها 0 عنصر هو C_n^0 ؛ عدد الأجزاء التي لها 1 عنصر هو C_n^1 ؛....... عدد الأجزاء التي لها n عنصر هو C_n^n ؛ و منه عدد الأجزاء ل E هو $C_n^0+C_n^1+C_n^2+......+C_n^n=(1+1)^n=2^n$

5- برهان لحدانية نيوتن : نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق بأن العلاقة صحيحة ل : $n=1$.

لدينا : $\sum_{i=0}^{i=1} C_1^i a^{1-i}b^i = C_1^0a^{1-0}b^0+C_1^1a^{1-1}b^1=1a+1b=a+b=(a+b)^1$ إذن العلاقة صحيحة ل $n=1$.

- نفترض ان العلاقة صحيحة إلى الرتبة n : إذن $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i}b^i$ مع $n\in\mathbb{N}^*$ (معطيات الترجع)

- نبين أن العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$ أي نبين أن : $(a+b)^{n+1}=\sum_{i=0}^{i=n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i}b^i$ ؟ لدينا:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\
&= \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i}b^i(a+b)\\
&= a\sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i}b^i + b\sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i}b^i\\
&= \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i+1}b^i + \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i}b^{i+1}\\
&= C_n^0a^{n+1}b^0 + \sum_{i=1}^{i=n} C_n^i a^{n-i+1}b^i + \sum_{i=0}^{i=n-1} C_n^i a^{n-i}b^{i+1} + C_n^na^{n-n}b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{i=n} C_n^i a^{n-i+1}b^i + \sum_{i=0}^{i=n-1} C_n^i a^{n-i}b^{i+1} + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{i=n} C_n^i a^{n-i+1}b^i + \sum_{j=1}^{j=n} C_n^{j-1} a^{n-j+1}b^{j-1+1} + b^{n+1} \quad ; (i=j-1)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^{k-1} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \quad ; (j=k)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k a^{(n+1)-k}b^k + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^{k-1} a^{(n+1)-k}b^k + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(C_n^k+C_n^{k-1}\right) a^{(n+1)-k}b^k + b^{n+1}\\
&= C_{n+1}^0a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{k=n} \left(C_n^k+C_n^{k-1}\right) a^{n-k+1}b^i + C_{n+1}^{n+1}a^0b^{n+1}\\
&= C_{n+1}^0a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{k=n} C_{n+1}^k a^{n-k+1}b^k + C_{n+1}^{n+1}a^0b^{n+1} \quad ; \left(C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{k=n+1} C_{n+1}^k a^{n-k+1}b^k = \sum_{j=0}^{j=n+1} C_{n+1}^j a^{n-j+1}b^j
\end{aligned}$$

إذن العلاقة صحيحة للرتبة $n+1$. خلاصة: $\forall n\in\mathbb{N}^* : (a+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n} C_n^i a^{n-i}b^i$ مع a b من $\mathbb{R}$.