درس : الهندسة الفضائية دراسة تحليلية

I. إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم - إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس:

01. الأساس و المعلم في الفضاء:

1. نشاط :

أنشئ في الفضاء ثلاث متجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ غير مستوائية انطلاق من نقطة O معلومة ثم أنشئ المستقيمات $D_1(O,\vec{i})$; $D_2(O,\vec{j})$ و $D_3(O,\vec{k})$.

2. مفردات :

- المثلوث $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ يسمى أساس في الفضاء.
- المربوع $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ يسمى معلم في الفضاء .
- نقول إن الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أو أيضا : الفضاء $(\mathcal{E})$ مزود بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

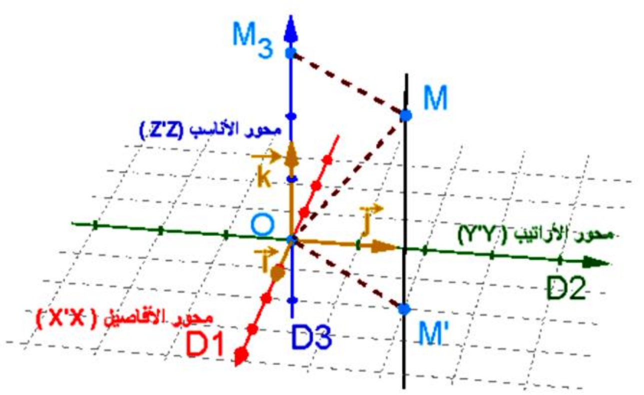
02. إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم - إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس:

1. نشاط :

نعتبر الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لنعتبر المستقيم $D_3(O,\vec{k})$ و المستوى $P(O,\vec{i},\vec{j})$ (المار من O و الموجه ب $\vec{i}$ و $\vec{j}$) .

نريد أن نبين عن ما يلي : لكل نقطة M من الفضاء يوجد مثلوث وحيد (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ حيث : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.



لتكن M نقطة من $(\mathcal{E})$.

لنعتبر النقطتين M_3 و M' التي تحقق ما يلي :

(أنظر الشكل)

- M_3 المسقط ل M على المستقيم $D_3(O,\vec{k})$ بتوازي مع المستوى $P(O,\vec{i},\vec{j})$.
- M' المسقط ل M على $P(O,\vec{i},\vec{j})$ بتوازي مع $D_3(O,\vec{k})$.

1. ماذا يمكن أن نقول عن استقامية $\vec{k}$ و $\overrightarrow{OM_3}$ ثم أعط تعبير متجهي لذلك .
2. ماذا يمكن أن نقول عن استوائية المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\overrightarrow{OM'}$ ثم استنتج كتابة ل $\overrightarrow{OM'}$.
3. من خلال العلاقة : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$ استنتج كتابة ل $\overrightarrow{OM}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$.
4. نبين أن هذه الكتابة وحيدة : (نفترض هناك كتبتين ل $\overrightarrow{OM}$ نضع $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$)
   نبين أن : $x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$.
5. أعط الخاصية :

2. مفردات:

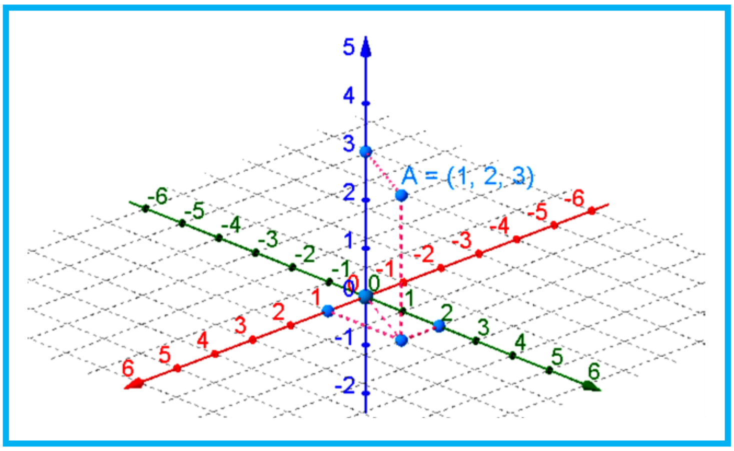
- العدد x يسمى أفصول النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
- العدد y يسمى أرتوب النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
- العدد z يسمى أنسوب النقطة M بالنسبة المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

3. تعريف و خاصية :

- لكل نقطة M من الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ يوجد مثلوث وحيد (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ حيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
- المثلوث (x,y,z) يسمى إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. نكتب $M(x,y,z)$ أو أيضا : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
- المثلوث (x,y,z) يمثل كذلك إحداثيات المتجهة $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للإساس $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ و نكتب $\vec{u}(x,y,z)$ أو أيضا $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

4. كتابة :

- $M(x,y,z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
- $\overrightarrow{OM}(x,y,z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$



5. مثال:

$A(1,2,3)$ يعني أن $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. أنشئ A .

03. إحداثيات $\vec{u}+\vec{v}$ و $\alpha.\vec{u}$ و α و $\overrightarrow{AB}$ - إحداثيات منتصف قطعة

1. خاصية :

نعتبر الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. α من $\mathbb{R}$. $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتان من الفضاء $(\mathcal{E})$.

$A(a,b,c)$, $B(a',b',c')$ نقطتين من الفضاء $(\mathcal{E})$. $I(a_I,b_I,c_I)$ منتصف $[AB]$ لدينا:

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)(x+x',y+y',z+z')$ و $\alpha.\vec{u}(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z)$

2) $\overrightarrow{AB}(a'-a,b'-b,c'-c)$

3) $I\left(\frac{a'+a}{2},\frac{b'+b}{2},\frac{c'+c}{2}\right)$.

جواب :

1) نبين أن :

لدينا :

$$\vec{u}+\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)+\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$=x\vec{i}+x'\vec{i}+y\vec{j}+y'\vec{j}+z\vec{k}+z'\vec{k}$ (الجمع في مجموعة المتجهات تبادلي)

$=\left(x+x'\right)\vec{i}+\left(y+y'\right)\vec{j}+\left(z+z'\right)\vec{k}$ (حسب موضوعات الفضاء (درس متجهات الفضاء))

خلاصة : إحداثيات المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ هو المثلوث $\left(x+x',y+y',z+z'\right)$. نكتب : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(x+x',y+y',z+z'\right)$.

نبين أن : $\alpha.\vec{u}\left(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z\right)$

$$\alpha.\vec{u}=\alpha.\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

$=\alpha\left(x\vec{i}\right)+\alpha\left(y\vec{j}\right)+\alpha\left(z\vec{k}\right)$ (حسب موضوعات الفضاء (درس متجهات الفضاء))

$=\left(\alpha x\right)\vec{i}+\left(\alpha y\right)\vec{j}+\left(\alpha z\right)\vec{k}$ (حسب موضوعات الفضاء (درس متجهات الفضاء))

خلاصة : إحداثيات المتجهة $\alpha\vec{u}$ هو المثلوث $\left(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z\right)$ نكتب : $\alpha.\vec{u}\left(\alpha.x,\alpha.y,\alpha.z\right)$

2) إحداثيات $\overrightarrow{AB}$

نضع : $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$

لدينا :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}\right)=\left(x_B-x_A\right)\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\vec{j}+\left(z_B-z_A\right)\vec{k}$$

خلاصة : $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$

2. مثال :

مثال 1 : $A\left(1,2,3\right)$ و $B\left(-2,4,5\right)$.

- إحداثيات $\overrightarrow{AB}\left(-2-1,4-2,5-3\right)=\overrightarrow{AB}\left(-3,2,2\right)$.
- $I\left(\frac{-2+1}{2},\frac{4+2}{2},\frac{5+3}{2}\right)=I\left(\frac{-1}{2},3,4\right)$ منتصف القطعة $[AB]$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}$ و $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$

لدينا : $2\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}2=\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}\vec{v}$ و $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\left(\vec{u}+\vec{w}\right)=\begin{pmatrix}2+1\\3-2\\-5+7\end{pmatrix}\left(\vec{u}+\vec{w}\right)=\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}\vec{w}+\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}\vec{u}$.

مثال 2 :

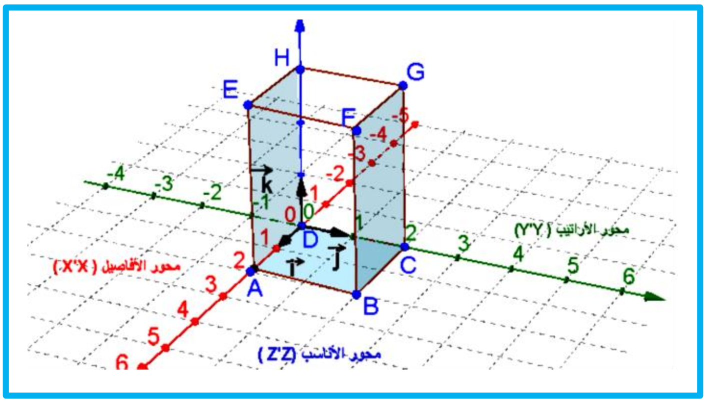
الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. لنعتبر المتوازي المستطيلات القائم ABCDEFGH التالي (أنظر الشكل) .

حدد إحداثيات رؤوس المتوازي المستطيلات القائم ABCDEFGH .

لدينا:

$A\left(2,0,0\right)$ و $B=\left(2,2,0\right)$ و $C=\left(0,2,0\right)$ و $D\left(0,0,0\right)$

و $F=\left(2,2,3\right)$ و $G=\left(0,2,3\right)$ و $H=\left(0,0,3\right)$



II. محددة ثلاث متجهات:

01. شرط استقامية متجهتين:

1. خاصية1 :

$\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتان من الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان يكافئ يوجد α من $\mathbb{R}$ حيث: $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ أو $\vec{v}=\alpha\vec{u}$

2. تعريف و خاصية:

- $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ متجهتان من الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. المحددات التالية :

$\Delta_x=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=yz'-zy'$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=xz'-zx'$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$ تسمى المحددات المستخرجة ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان يكافئ $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

3. مثال :

هل المتجهتان $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ مستقيميتان ؟ لدينا : $\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2$ إذن $\Delta_x\neq 0$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين .

02. محددة ثلاث متجهات:

1. تعريف :

$\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{w}(x'',y'',z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

العدد :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$=(xy'z''-xz'y'')+(-yx'z''+yz'x'')+(zx'y''-zy'x'')$$

يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في هذا الترتيب .

2. مثال:

احسب $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ مع $\vec{u}(1,2,3)$, $\vec{v}(-2,0,1)$ و $\vec{w}(1,0,3)$.

لدينا : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=1\times0-2\times(-7)+3\times0=14$.

خلاصة : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=14$

03. متجهات مستوائية:

1. خاصية:

$\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{w}(x'',y'',z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

($\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية) $\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$.

2. مثال :

نأخذ المثال السابق أدرس استوائية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

بما أن : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=14$ إذن $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$ و بالتالي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية .

خلاصة : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية .

III. تمثيل بارامتري لمستقيم:

01. تمثيل بارامتري لمستقيم:

1. نشاط :

نعتبر الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة غير منعدمة من $(\mathcal{E})$ و $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من $(\mathcal{E})$.

$M(x,y,z)$ نقطة من $(\mathcal{E})$. من خلال $M(x,y,z)\in D(A,\vec{u})$. أوجد تكافئ يكتب x و y و z بدلالة a,b,c,x_0, y_0 و z_0 .

جواب :

لدينا : $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $M(x,y,z)\in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}\ ,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow t\in\mathbb{R}/$

لدينا : $M(x,y,z)\in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow$ (المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان)

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\ ,\ \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

2. مفردات :

الكتابة المحصل عليها تسمى تمثيل بارا متري للمستقيم $D(A,\vec{u})$.

3. تعريف :

> النظمة : $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$ تسمى تمثيل بارامتري للمستقيم $D\left(A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix},\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$.

4. ملحوظة :

- لكل قيمة للوسيط t يوافق نقطة وحيدة و العكس صحيح . (مثلا $k=0$ يوافق (أو يمثل) النقطة A)
- تمثيل بارامتري لمستقيم ليس بوحيد (هناك مالانهاية)

5. مثال :

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

- تمثيل بارامتري للمستقيم $D(A(0,5,-4),\vec{u}(2,1,-3))$. هو : $D(A,\vec{u})$: $\begin{cases} x=2t \\ y=5+t \\ z=-4-3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
- ندرس هل النقطة $B(-2,4,-1)$ تنتمي إلى D

لدينا :

$$B(-2,4,-1)\in D \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\begin{cases}-2=2t\\ 4=5+t\\ -1=-4-3t\end{cases} \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\begin{cases}t=\frac{-2}{2}=-1\\ t=4-5=-1\\ 3t=-4+1=-3\end{cases} \Leftrightarrow t=-1$$

خلاصة : $B(-2,4,-1)\in D$.

- نحدد إحداثيات النقطة C تقاطع المستقيم D و المستوى $P(O,\vec{i},\vec{j})$.

المستوى $P(O,\vec{i},\vec{j})$ يمثل النقط M حيث $\overrightarrow{OM}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ (أي بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$) إذن أناسيب نقطه منعدمة ولهذا يجيب $z=-4+t=0$ ومنه : $t=4$ وبالتالي : $x=2t=2\times4=8$ و $y=5-3t=5-3\times4=-7$

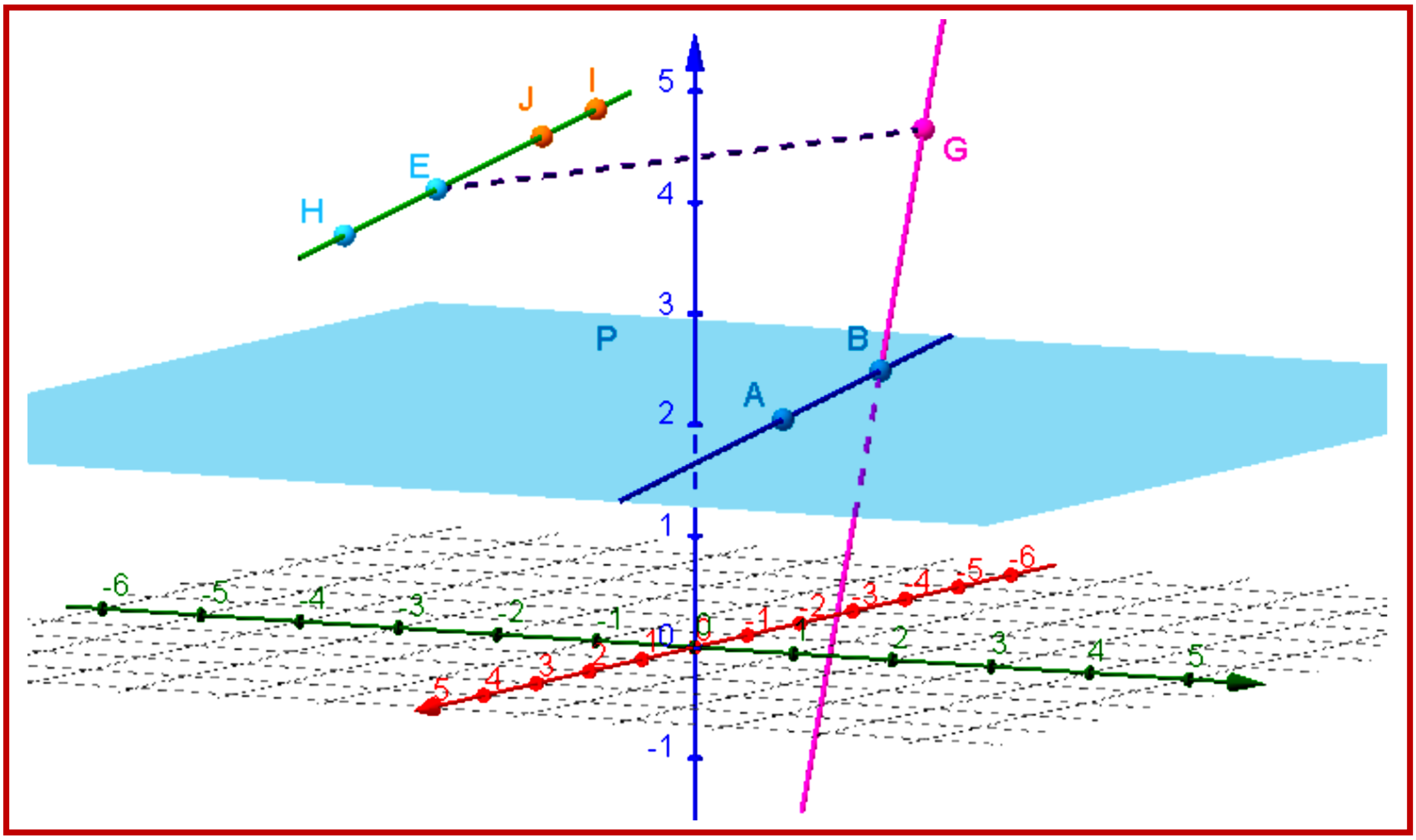
خلاصة : المستقيم D يقطع المستوى $P(O,\vec{i},\vec{j})$ في النقطة $C(8,-7,0)$

02. الأوضاع النسبية لمستقيمين:

1. نشاط:

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. من خلال المستقيمات (AB) و (EH) و (IJ) و (BG) استنتج الأوضاع النسبية الممكنة لمستقيمين في الفضاء .
2. أعط الخاصية لكل حالة (أي الشر ط لذلك).



3. مفردات :

- المستقيم (IJ) منطبق مع المستقيم (EH) إذن : $(IJ)=(EH)$ كذلك نقول إن (IJ) يوازي (EH) ونكتب : $(IJ)//(EH)$
- (AB) و (EH) متوزيان قطعا إذن: $(AB)\cap(EH)=\emptyset$ نكتب : $(AB)//(EH)$.
- (BG) يقطع (AB) في النقطة B نكتب : $(AB)\cap(BG)=\{B\}$.

- (BG) و (HE) غير مستوائيين .

2. خاصية :

$D(A,\vec{u})$ و $D'(B,\vec{v})$ مستقيمان من الفضاء (ε) .

- $(D)=(D') \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان و لهما نقطة مشتركة.
- (D) و (D') متوازيان قطعا $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان و ليس لهما نقطة مشتركة.
- $(D)\cap(D')=\{I\} \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $I\in(D)\cap(D')$.
- (D) و (D') غير مستوائيين $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و ليس لهما نقطة مشتركة.

3. ملحوظة :

- $D(A,\vec{u})$ و $D'(B,\vec{v})$ غير مستوائيين $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مستوائية .
- أو أيضا $D(A,\vec{u})$ و $D'(B,\vec{v})$ غير مستوائيين $\Leftrightarrow \det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)\neq 0$

4. مثال :

هل $D\left(A(0,5,-4),\vec{u}(0,1,2)\right)$ و D' متوازيين حيث تمثيل بارا متري ل D' هو كالتالي ؟ $D' : t\in\mathbb{R} / \begin{cases} x=-1 \\ y=-5-2t \\ z=1-4t \end{cases}$

IV. تمثيل بارا متري لمستوى - معادلة ديكارتية لمستوى:

01. تمثيل بارا متري لمستوى:

1. نشاط :

$\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتان غير مستقيميتين من الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة معلومة من الفضاء (ε) .نعتبر المستوى $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) ما هو الشرط الضروري و الكافي الذي تحققه النقطة $M(x,y,z)$ لكي تنتمي إلى المستوى $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ ؟

2) أتمم العبارة التالية : $M(x,y,z)\in P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ مستعملا تكافؤات متتالية من أجل كتابة x و y و z بدلالة a , b , c , a' , b' , c' , x_0 , y_0 , z_0

جواب :

1) الشرط الضروري و الكافي الذي تحققه النقطة $M(x,y,z)$ لكي تنتمي إلى المستوى $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ هو : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستوائية .

2) نتمم العبارة التالية : $M(x,y,z)\in P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ مستعملا التكافؤات المتتالية :

لدينا :

$$M(x,y,z)\in P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)\Leftrightarrow \text{(}\vec{u}\text{ و }\vec{v}\text{ و }\overrightarrow{AM}\text{ مستوائية)}$$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ;\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x=x_0+a\alpha+a'\beta \\ y=y_0+b\alpha+b'\beta \\ z=z_0+c\alpha+c'\beta \end{cases}$$

2. تعريف:

النظمة : $\begin{cases} x = x_0 + a\alpha + a'\beta \\ y = y_0 + b\alpha + b'\beta \\ z = z_0 + c\alpha + c'\beta \end{cases} / \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ تسمى تمثيل بارا متري للمستوى $P\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$.

3. ملحوظة :

- لكل قيمة للوسيط α ثم للوسيط β يوافق نقطة وحيدة و العكس صحيح . (مثلا $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ يوافق (أو يمثل) النقطة A)
- تمثيل بارامتري لمستوى ليس بوحيد (هناك ما لانهاية) .

4. مثال : الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

- تمثيل بارامتري للمستوى $P\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$. هو : $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ y = -2 + 5\alpha - 4\beta \\ z = 7 + 9\beta \end{cases}$: $P(A,\vec{u},\vec{v})$
- ندرس هل النقطة $B(5,12,-2)$ تنتمي إلى $P(A,\vec{u},\vec{v})$. لدينا :

$$B(5,12,-2) \in D \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} 5 = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ 12 = -2 + 5\alpha - 4\beta \\ -2 = 7 + 9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} 5 = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ 12 = -2 + 5\alpha - 4\beta \\ -9 = 9\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} 5 = 1 + 3\alpha - 2 \\ 12 = -2 + 5\alpha + 4 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

خلاصة : $B(5,12,-2) \in D$.

02. معادلة ديكارتية لمستوى:

1. نشاط : هل هناك طريقة أخرى لشرط الذي تحققه النقطة $M(x,y,z)$ لكي تنتمي إلى المستوى $P\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}\right)$ ؟

جواب : نعم هناك طريقة أخرى :

لدينا :

$$M(x,y,z) \in P(A,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow (\text{ مستوائية } \overrightarrow{AM} \text{ و } \vec{v} \text{ و } \vec{u})$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a' & a'' \\ y - y_0 & b' & b'' \\ z - z_0 & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\Delta_x - y\Delta_y + z\Delta_z + (-x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + b\Delta_y + c\Delta_z + d = 0$$

مع : $a = \Delta_x = b'c'' - c'b''$ و $b = \Delta_y = a'c'' - c'a''$ و $c = \Delta_z = a'b'' - b'a''$ و $d = -x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z$

2. مفردات : المعادلة المحصل عليها : $ax+b\Delta_y+c\Delta_z+d=0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستوى $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$.

3. تعريف وخاصية :

$\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتان غير مستقيمتين من الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ و $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ نقطة معلومة من الفضاء $(\mathcal{E})$. نعتبر المستوى $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$. لدينا :

المعادلة : $\left(x-x_0\right)\Delta_x-\left(y-y_0\right)\Delta_y+\left(z-z_0\right)\Delta_z=0$ تسمى معادلة ديكارتية للمستوى $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$. مع Δ_x و Δ_y و Δ_z هي المحددات المستخرجة ل $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

وهذه المعادلة تكتب باختصار: $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$: $ax+by+cz+d=0$ مع a و b و c و d من $\mathbb{R}$ و $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

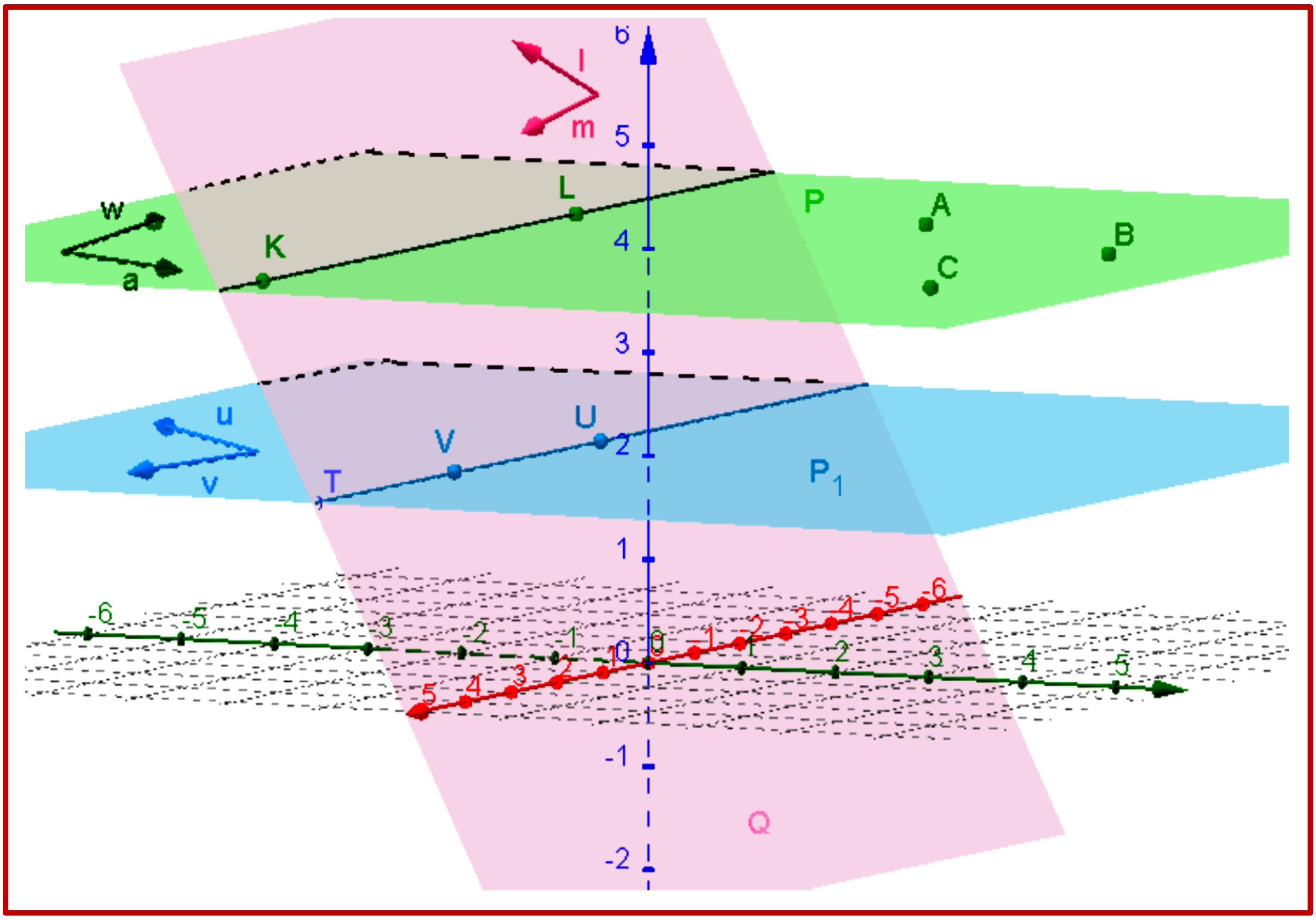
4. ملحوظة :

- المحددات المستخرجة $\Delta_x=\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}$ و $\Delta_y=\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}$ و $\Delta_z=\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$ على الأقل واحدة منها غير منعدمة .
- الأعداد a و b و c على الأقل واحدة منها غير منعدمة في المعادلة الديكارتية : $ax+by+cz+d=0$: $P\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$

03. الأوضاع النسبية لمستويين:

1. نشاط : الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1. من خلال المستويات P و P_1 و Q استنتج الأوضاع النسبية الممكنة لمستويين في الفضاء . أعط الخاصية لكل حالة .



درس : الهندسة الفضائية دراسة تحليلية

4. مفردات :

- (P) و (ABC) منطبقان إذن : $(ABC)=(P)$ كذلك نقول إن : (P) و (ABC) متوازيان ونكتب : $(P)\parallel(P')$.
- (P) و (P_1) متوزيان قطعا إذن: $(P_1)\cap(P)=\varnothing$ نكتب : $(P)\parallel(P')$.
- (P) يقطع (Q) تبعا للمستقيم (KL) نكتب : $(P')\cap(P)=(KL)$

2. خاصية :

> $(P): ax+by+cz+d=0$ و $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$ مستويان من الفضاء $(\mathcal{E})$.
>
> - (P) و (P') منطبقان $\big((P')=(P)\big)$ $\Leftrightarrow$ $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$ و $k\neq 0$.
> - (P) و (P') متوازيان قطعا $\big((P')\cap(P)=\varnothing\big)$ $\Leftrightarrow$ $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'\neq kd$
> - (P) و (P') متقاطعان $\big((P')\cap(P)=(D)\big)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ غير مستقيميتين.

3. ملحوظة :

- مع العلم أن : $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ و $(a',b',c')\neq(0,0,0)$
- $P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$ متوازيان يكافئ المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u'}$ مستوائية و كذلك $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ مستوائية .
- أو أيضا : $P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $P(B,\vec{u'},\vec{v'})$ متقاطعان يكافئ $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u'})\neq 0$ أو $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{v'})\neq 0$ (على الأقل إحداهما $\neq 0$)

4. مثال :

V. معادلتان ديكارتيتان لمستقيم:

01. معادلتان ديكارتيتان لمستقيم:

1. نشاط : من خلال التمثيل بارا متري لمستقيم.

- نأخذ a و b و c غير منعدمة أوجد قيمة t بدلالة a , b , c , x_0 , y_0 , z_0
- نأخذ a و b و c أحدهما على الأقل منعدم مثلا $a=0$. أوجد قيمة t بدلالة b , c , y_0 , z_0

2. مفردات :

المعادلتين تسمى معادلتين ديكارتيتين للمستقيم $D(A,\vec{u})$

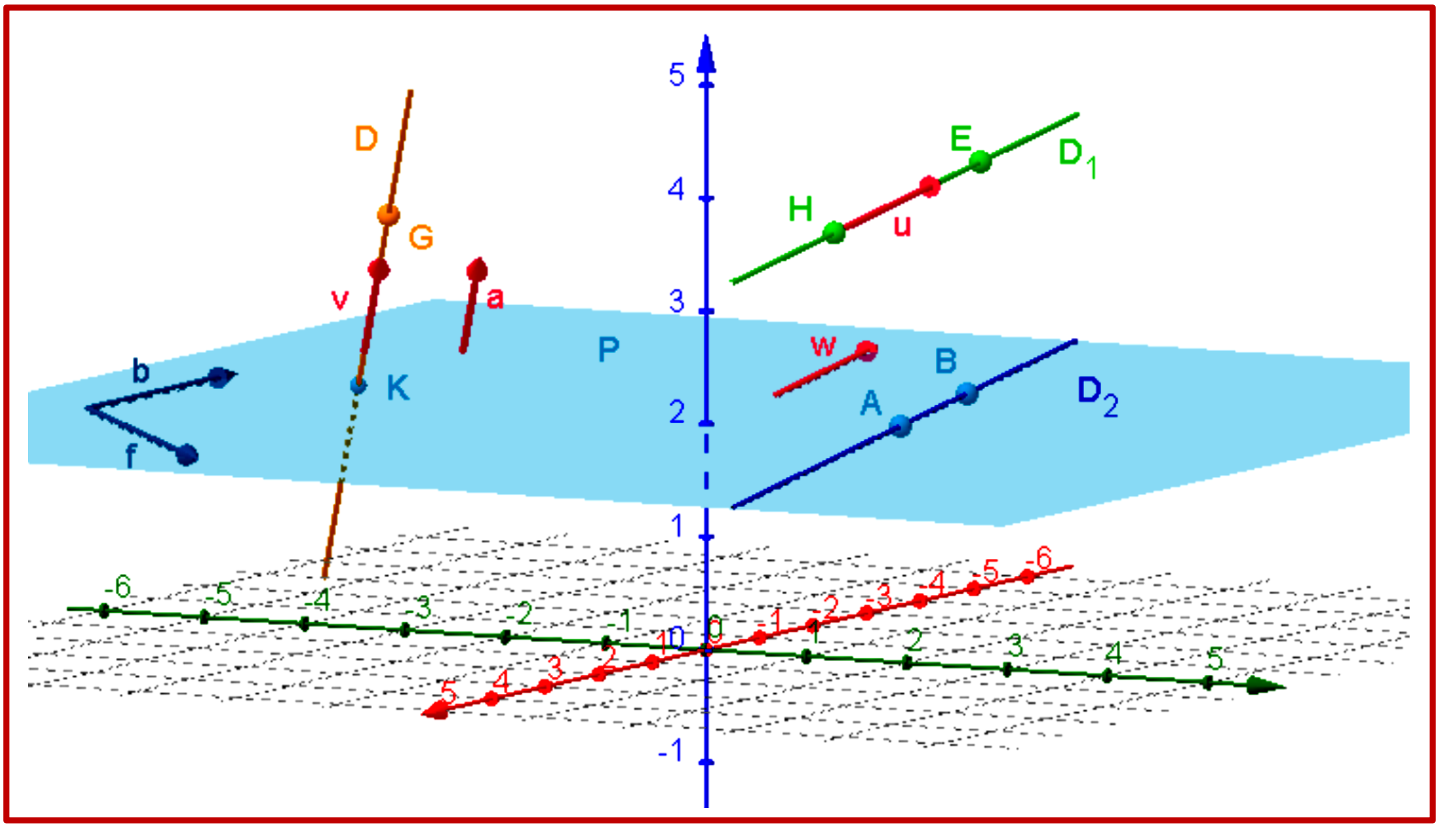
3. تعريف و خاصية :

> $D(A,\vec{u})$ مستقيم من الفضاء $(\mathcal{E})$ مع $\vec{u}(a,b,c)$ و $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من $(\mathcal{E})$.
>
> مع $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ تمثيل بارامتري ل $D(A,\vec{u})$
>
> - a و b و c غير منعدمة : $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} \Leftrightarrow M(x,y,z)\in D(A,\vec{u})$
> - a و b و c أحدهما على الأقل منعدم مثلا $a=0$: $\dfrac{z-z_0}{c}=\dfrac{y-y_0}{b}$ و $x=x_0 \Leftrightarrow M(x,y,z)\in D(A,\vec{u})$.
> - الكتابة السابقة تسمى معادلتين ديكارتيتين للمستقيم $D(A,\vec{u})$ أو أيضا نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم $D(A,\vec{u})$.

02. الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى:

1. نشاط :

1. ما هي الأوضاع النسبية للمستقيم $D(A,\vec{u})$ و المستوى $P(A,\vec{u},\vec{v})$ من الفضاء ؟
2. أعط الخاصية لكل حالة .



2. مفردات :

- (D_2) ضمن (P) ونكتب $(D_2)\subset(P)$ ومنه : $(D_2)\cap(P)=(D_2)$.
- (D_1) خارج (P) ونكتب $(D_1)//(P)$ ومنه : $(D_1)\cap(P)=\varnothing$.
- (D) يخترق (P) في النقطة K ومنه : $(D)\cap(P)=\{K\}$

2. خاصية :

$D(B,\vec{w})$ مستقيم من الفضاء $(\mathcal{E})$ و $P(A,\vec{u},\vec{v})$ مستوى من الفضاء $(\mathcal{E})$.

- (D) ضمن (P) يكافئ المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية و $B\in(P)$. (أو أيضا $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ و $B\in(P)$)
- (D) خارج (P) يكافئ المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية و $B\notin(P)$. (أو أيضا $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ و $B\notin(P)$)
- (D) يخترق (P) يكافئ المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية . (أو أيضا $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$)

3. ملحوظة :

- بالنسبة ل (D) خارج (P) يجب نقطة من (D) لا تنتمي إلى (P) .
- أما نقطة من (P) لا تنتمي إلى (D) لا يعني بالضرورة أن (D) خارج (P) يمكن أن يكون (D) ضمن (P) .