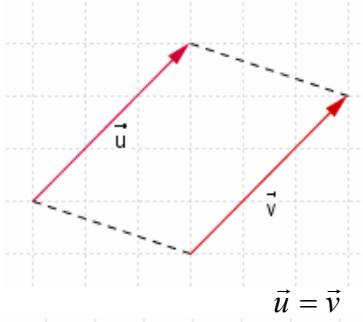


## المتجهات في الفضاء

### (I) تساوي متجهتين - جمع المتجهات

#### 1- عناصر متجهة

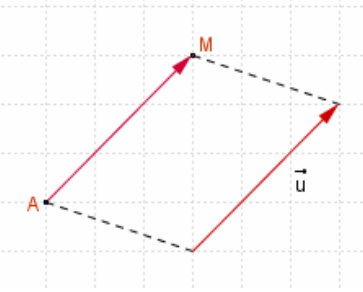
- $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة  $\overrightarrow{AB}$  بالرمز  $\vec{u}$  فان :
  - اتجاه  $\vec{u}$  هو اتجاه المستقيم  $(AB)$
  - منحنى  $\vec{u}$  هو المنحنى من  $A$  إلى  $B$
  - منظم  $\vec{u}$  هي المسافة  $AB$  و نكتب:  $AB = \|\vec{u}\|$
- ملحوظة:** لكل نقطة  $A$  من الفضاء المتجهة  $\overrightarrow{AA}$  ليس لها اتجاه و منظمها منعدم،  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب



### 2- تساوي متجهتين

#### تعريف

تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحنى و نفس المنظم



لكل متجهة  $\vec{u}$  من الفضاء و لكل نقطة  $A$  في الفضاء توجد نقطة وحيدة  $M$  حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

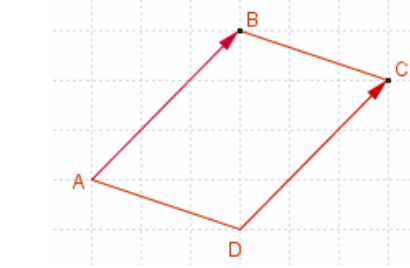
#### خاصية

$ABCD$  رباعيا في الفضاء

$ABCD$  متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

#### خاصية

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  أربع نقط من الفضاء  
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$  (تبديل الوسطين)  
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$  (تبديل الطرفين)



### 3- مجموع متجهتين - علاقة شال

**أ-**  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان في الفضاء

لتكن  $A$  نقطة من الفضاء،

توجد نقطة وحيدة  $B$  حيث  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

توجد نقطة وحيدة  $C$  حيث  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ .

النقطتان  $A$  و  $C$  تحددان متجهة

وحيدة  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

المتجهة  $\vec{w}$  هي مجموع المتجهتين

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$

نكتب  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

#### ب- علاقة شال

مهما كانت النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  من الفضاء

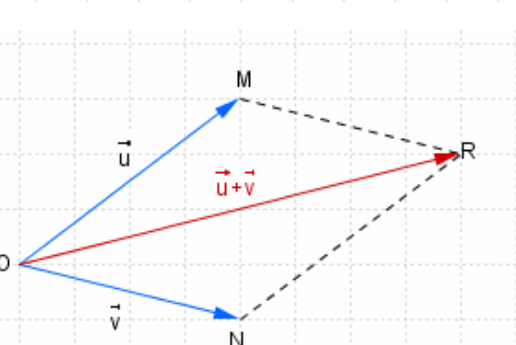
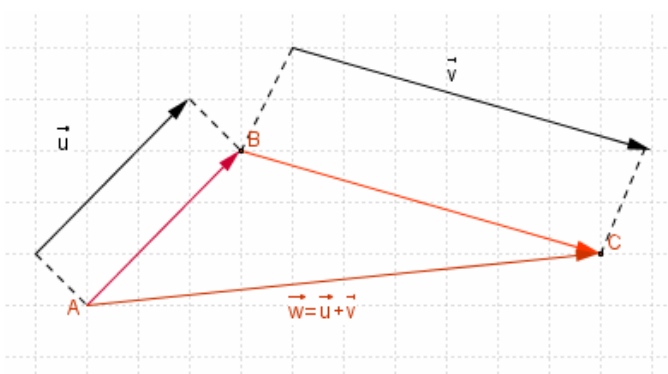
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

#### نتيجة

لتكن  $O$  و  $M$  و  $N$  و  $R$  أربع نقط من الفضاء  
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$  إذا وفقط إذا كان  $OMRN$  متوازي الأضلاع

**ملاحظة:** إذا كانت  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$  فان

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$  حيث  $OMRN$  متوازي الأضلاع



### ج- خاصيات

- \* لكل متجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$   $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- \* لكل ثلاث متجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$   $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- \* لكل متجهة  $\vec{u}$   $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

### أ- مقابل متجهة - فرق متجهتين مقابل متجهة

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة في الفضاء  
مقابل المتجهة  $\vec{u}$  هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاهها مضاد لمنحى  
المتجهة  $\vec{u}$  نرمز لها بالرمز  $-\vec{u}$

- \* لكل متجهة  $\vec{u}$  :  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- \* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$   
المتجهتان  $\vec{AB}$  و  $\vec{BA}$  متقابلتان نكتب  $\vec{AB} = -\vec{BA}$

### ب- فرق متجهتين تعريف

لكل متجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$   $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

### أمثلة

مكعب ABCDEFGH

$$\vec{ED} + \vec{EF} = \vec{EC} \quad \vec{BC} = -\vec{HE} \quad \vec{AB} = \vec{HG}$$

### 4- منتصف قطعة

I منتصف [AB] إذا وفقط إذا كان  $\vec{AI} = \vec{IB}$  ( $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ )

### (II) الاستقامية- التعريف المتجهي للمستقيم

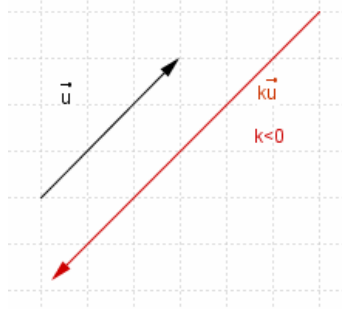
#### 1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

#### تعريف

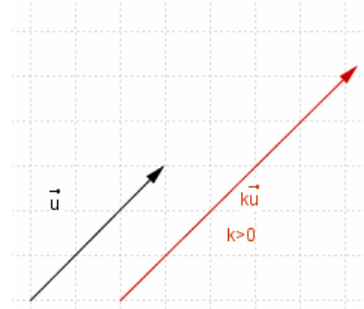
$\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم  
جداء المتجهة  $\vec{u}$  في العدد الحقيقي k هي المتجهة  $k\vec{u}$  حيث :

$$\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$$

\*  $k\vec{u}$  منحى هو  $\vec{u}$  إذا كان  $k > 0$   
عكس منحى  $\vec{u}$  إذا كان  $k < 0$



$k < 0$



$k > 0$

\* لكل متجهة  $\vec{u}$  و لكل عدد حقيقي k :  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$  و  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

### 2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و مهما يكن العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  فان

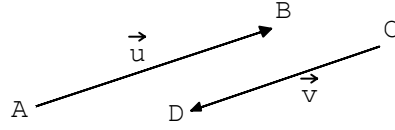
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

$\alpha\vec{u} = \vec{0}$  إذا وفقط إذا كان  $\alpha = 0$  أو  $\vec{u} = \vec{0}$

### 3- الاستقامية استقامية متجهتين أ- تعريف

تكون متجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين إذا و فقط كانت احدهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



#### ملاحظة

$\vec{0}$  مستقيمة مع أية متجهة

#### استقامية ثلاث نقط

##### تعريف

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  نقطا من الفضاء حيث  $A \neq B$   
تكون النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي  $\alpha$  حيث  $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

#### نوازي مستقيمين

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقطا من الفضاء حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$   
 $(AB) \parallel (CD)$  إذا و فقط إذا كان  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  مستقيمتين

#### التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء

##### تعريف

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من الفضاء  
كل متجهة  $\vec{u}$  غير منعومة و مستقيمة مع المتجهة  $\vec{AB}$   
تسمى متجهة موجهة للمستقيم  $(AB)$

#### خاصية

لتكن  $A$  نقطة من الفضاء و  $\vec{u}$  متجهة غير منعومة  
مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$   
هي المستقيم المار من  $A$  و الموجه بـ  $\vec{u}$ . نرسم له بالرمز  $D(A; \vec{u})$

$$D(A; \vec{u}) = \{M \in (E) / \vec{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

#### تمرين

ليكن  $ABCDEFGH$  مكعبا نضع  $\vec{AB} = \vec{i}$  و  $\vec{AD} = \vec{j}$

و  $\vec{AE} = \vec{k}$  و  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . نعتبر  $I$  منتصف  $[HG]$

1- بين أن  $\vec{u}$  موجهة للمستقيم  $(AI)$

2- ليكن المستقيم  $(\Delta)$  المار من  $G$  و الموازي للمستقيم  $(AI)$  و نقطة من الفضاء حيث

$$M \in (\Delta) \text{ بين أن } \vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2\vec{BG}$$

#### الجواب

1- نبين أن  $\vec{u}$  موجهة للمستقيم  $(AI)$

أي نبين أن  $\vec{AI}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتين

لدينا  $I$  منتصف  $[HG]$  ومنه  $\vec{HI} = \frac{1}{2} \vec{HG}$

$$\vec{AI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \frac{1}{2} \vec{HG}$$

بما أن  $ABCDEFGH$  مكعب فان  $\vec{EH} = \vec{AD} = \vec{j}$  و  $\vec{HG} = \vec{AB} = \vec{i}$

$$\text{ومنّه } \vec{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{i} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{2} \vec{u}$$

إذن  $\vec{AI}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتان و منه  $\vec{u}$  موجهة للمستقيم  $(AI)$

2 نبين أن  $M \in (\Delta)$

لدينا  $(\Delta)$  المار من  $G$  و الموازي للمستقيم  $(AI)$  أي  $(\Delta) = D(G; \vec{u})$

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$$

بما أن  $ABCEFGH$  مكعب فإن  $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{j}$  و  $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{AE} = -\vec{k}$  و  $\overrightarrow{BC} = \vec{j}$  و  $\overrightarrow{CG} = \vec{k}$

$$\overrightarrow{GM} = -\vec{j} - \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{u}$$

و بالتالي  $M \in D(G; \vec{u})$  إذن  $M \in (\Delta)$

### III) الاستوائية- التعريف المتجهي للمستوى

#### 1- تعريف

ليكن  $(P)$  مستوى من الفضاء و  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط غير مستقيمة من المستوى  $(P)$   
نقول إن  $(P)$  هو المستوى المار من  $A$  و الموجه بالمتجهين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$

#### نتيجة

متجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا  $(P)$  هو المستوى المار من النقطة  $A$  و الموجه بالمتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  نرسم له بالرمز  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ .

#### خاصية

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهين غير مستقيمتين و نقطة  $A$  من الفضاء.  
مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  و  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  هي المستوى  $(P)$  المار من  $A$  و الموجه بالمتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و نكتب  $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$

#### 2- الاستوائية

##### تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  ثلاث متجهات في الفضاء  
نقول إن المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا وفقط وجدت أربع نقط مستوائية  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  حيث  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  و  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$  و  $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

#### أمثلة

$ABCDEFGH$  متوازي المستطيلات

$\overrightarrow{BE}$  و  $\overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{BH}$  مستوائية لان النقط  $B$

و  $C$  و  $E$  و  $H$  مستوائية  $[(BC) \parallel (EH)]$

$\overrightarrow{BE}$  و  $\overrightarrow{BH}$  و  $\overrightarrow{BD}$  غير مستوائية لأن  $BDEH$  رباعي الأوجه

#### خاصية

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهين غير مستقيمتين و  $\vec{w}$  متجهة في الفضاء  
المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  حيث  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

#### نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  حيث  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$  فإن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $M$  مستوائية

#### تمرين

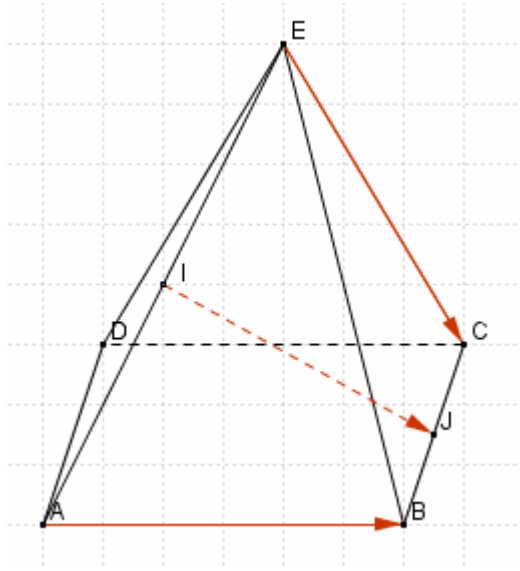
$EABCD$  هرم قاعدته المستطيل  $ABCD$ ،  $I$  و  $J$  منتصف  $[AE]$  و  $[BC]$  على التوالي.

بين أن المتجهات  $\overrightarrow{IJ}$  و  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{EC}$  مستوائية

#### الحل

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$

و حيث  $I$  و  $J$  منتصف  $[AE]$  و  $[BC]$  فإن :



$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \text{ و بالتالي}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ ومنه}$$

إذن  $\overrightarrow{IJ}$  و  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{EC}$  مستوائيّة