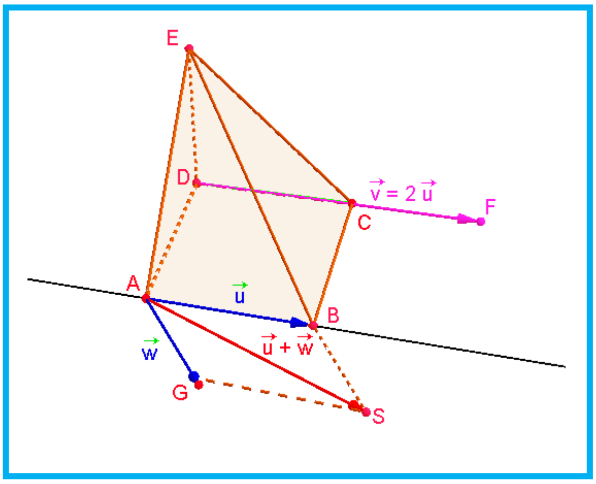
درس : متجهات الفضاء

I. متجهات الفضاء :

01. تمديد مفهوم متجهة في المستوى للفضاء :

1. مفهوم متجهة في الفضاء :



في المستوى ، متجهة $\overrightarrow{AB}$ معرفة ب :
- اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو المستقيم (AB)
- منحى $\overrightarrow{AB}$ هو المنحى من A إلى B
- طول $\overrightarrow{AB}$ (أو منظم $\overrightarrow{AB}$) هي المسافة AB و نكتب $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

هذا المفهوم نمدده للفضاء $(\mathcal{E})$ وكذلك جميع خاصيات المتجهات في المستوى تبقى صالحة في الفضاء $(\mathcal{E})$.

2. مثال :

- حالة $A = B$ المتجهة $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (ليس لها اتجاه ومنظمها منعدم وتسمى المتجهة المنعدمة)
- نقول إن متجهتين متساويتان إذا كان لهما اتجاهين متوازيين و نفس المنحى و نفس المنظم .
- $ABCD$ رباعي في $(\mathcal{E})$ هو متوازي أضلاع يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

02. الحساب المتجهي في الفضاء مجموع متجهتين و جداء متجهة في عدد حقيقي :

1. ملحوظة :

مجموع متجهتين وجداء متجهة في عدد حقيقي معرفتين كما عرفا في المستوى و لهما نفس الخاصيات .

2. مثال :

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- علاقة شال : $\forall A,B,C \in (\mathcal{E}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس اتجاه $\vec{u}$ ونفس منظم $\vec{u}$ و منحاها عكس منحى المتجهة $\vec{u}$ ونرمز لها ب $-\vec{u}$.
- المتجهة $\vec{v} = k\vec{u}$.
  - لها نفس منحى المتجهة $\vec{u}$ إذا كان $k > 0$. و لها عكس منحى المتجهة $\vec{u}$ إذا كان $k < 0$
  - منظم المتجهة $\vec{v}$ يحقق ما يلي $\|\vec{v}\| = |k|\|\vec{u}\|$
- لكل متجهة $\vec{u}$ نضع $0.\vec{u} = \vec{0}$. لكل عدد حقيقي k نضع $k.\vec{0} = \vec{0}$.

1. خاصيات:

لكل متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و لكل عددين حقيقيين k و k' :

1) $(k+k').\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ ؛ 2) $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

3) $k(k'.\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$ ؛ 4) $1.\vec{u} = \vec{u}$

5) $k.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$.

II. استقامية متجهتين - التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء .

01. استقامية متجهتين – استقامية 3 نقط :

1. تعريف:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان إذا وجد α من $\mathbb{R}$ حيث $\vec{u} = k\vec{v}$ أو $\vec{v} = k\vec{u}$ (أي إحداهما تكتب كجداء الأخرى وعدد حقيقي) .

2. ملحوظة :

- المتجهة المنعدمة مستقيمية مع جميع متجهات الفضاء.
  $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين .
- $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان تكافئ $(AB)\parallel(CD)$.
- A و B و C نقط من الفضاء مستقيمية يكافئ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ إحداهما تكتب بدلالة الأخرى .

02. التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

1. تعريف - خاصية :

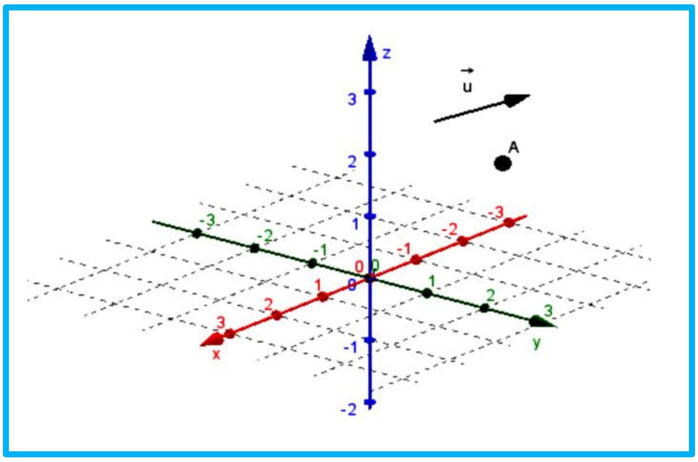
لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء $(\mathcal{E})$.

- كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB).
- مجموعة النقط M من الفضاء $(\mathcal{E})$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ حيث α من $\mathbb{R}$ هي المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$
  نرمز له ب: $D(A,\vec{u})$ ومنه: $D(A,\vec{u})=\{M\in(\mathcal{E})/\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u};\alpha\in\mathbb{R}\}$

2. مثال :

لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة.(أنظر الشكل أسفله)

أنشئ المستقيم $D(A,\vec{u})$.



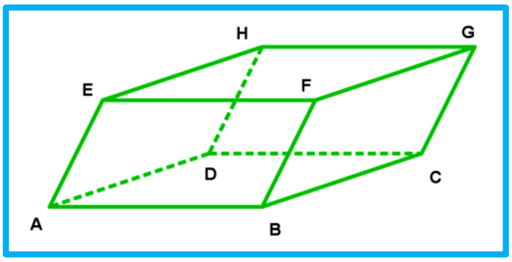
III. المتجهات المستوائية – تحديد متجهي لمستوى في الفضاء :

01. المتجهات المستوائية:

1. مبرهنة و تعريف:

- نقول إن أربع نقط A و B و C و D من الفضاء مستوائية إذا كانت تنتمي لنفس المستوى
- نقول إن ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ مستوائية إذا وفقط إذا وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.

2. مثال: ABCDEFGH متوازي المستطيلات أوجد ثلاث متجهات مستوائية ثم أخرى غير مستوائية .



المتجهات : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{DH}$.

لدينا : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{DH}$.

ونعلم أن النقط D و C و G و H مستوائية .

ومنه المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية .

3. ملحوظة :

- إذا كانت متجهتين من بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين فإن المتجهات الثلاث مستوائية .
- $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{DC}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{DE}$ مستوائية لا يعني أن النقط A و B و C و D و E مستوائية .

4. مثال :

المتجهات : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{EF}$ هي مستوائية لأن : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{EF}$ مستقيمية و لكن النقط A و B و D و E و F غير مستوائية (لأن النقطة D لا تنتمي إلى المستوى المحدد بالنقط A و B و E و F) .

02. تحديد متجهي لمستوى في الفضاء :

1. مبرهنة و تعريف:

- كل مستوى (P) في الفضاء $(\mathcal{E})$ يحدد بنقطة A من $(\mathcal{E})$ و متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين من $(\mathcal{E})$ ؛ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تسميان متجهتان موجهتان للمستوى و نرمز له ب : $(P)=P(A,\vec{u},\vec{v})$
- مجموعة النقط M من الفضاء $(\mathcal{E})$ التي تحقق ما يلي: $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ هي المستوى (P) المار من A والموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نرمز له ب : $P=P(A,\vec{u},\vec{v})$. ومنه: $P(A,\vec{u},\vec{v})=\{M\in(\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\vec{v} / x\,,\,y\in\mathbb{R}\}$.

2. ملحوظة :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء $(\mathcal{E})$

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط كتبت إحدى المتجهات الثلاث بدلالة المتجهتين المتبقيتين .

أو أيضا : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية يكافئ $\exists x,y\in\mathbb{R} / \vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

مثلا : $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AB}$ كتبت بدلالة $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$) . مثلا : $\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{BC}$ كتبت بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BD}$) .

- المتجهة المنعدمة مستوائية مع كل متجهتين من الفضاء .

3. تمرين :

لنعتبر النقط A و B و C و D و E من الفضاء $(\mathcal{E})$ حيث : $(1) : 2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

1. بين أن : A و B و C و D مستوائية .

جواب :

لدينا :

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)-5\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

ومنه : $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$ أي المتجهة $\overrightarrow{AD}$ كتبت بدلالة المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

إذن المتجهات $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية ومنه : النقط A و B و C و D مستوائية .

خلاصة : النقط A و B و C و D مستوائية .

IV. توازي في الفضاء :

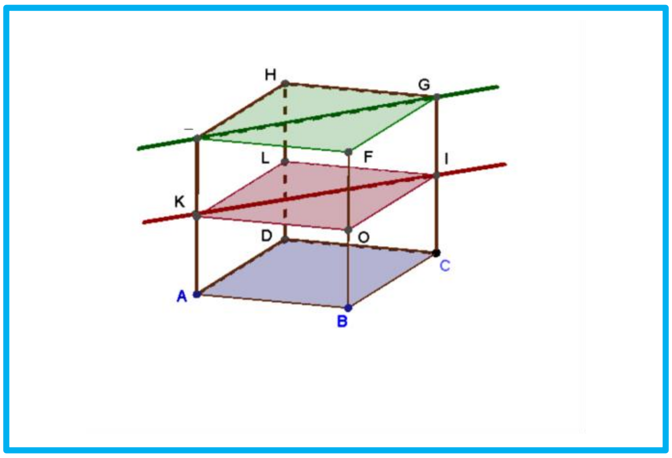
01. المستقيمات المتوازية :

1. تعريف :

$D(A,\vec{u})$ و $\Delta(B,\vec{v})$ مستقيمان من الفضاء .

$\Delta(B,\vec{v})\parallel D(A,\vec{u})\Leftrightarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين)

أو أيضا : $\Delta(B,\vec{v})\parallel D(A,\vec{u})\Leftrightarrow \vec{v}=\alpha\vec{u}\ ;\ k\in\mathbb{R}^*$



02. المستقيمات و المستويات المتوازية :

1. تعريف :

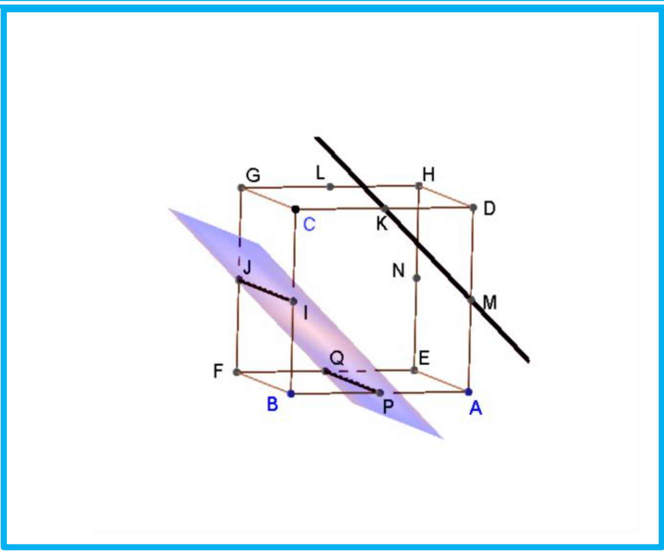
$D(A,\vec{u})$ مستقيم و $P(B,\vec{v},\vec{w})$ مستوى من الفضاء

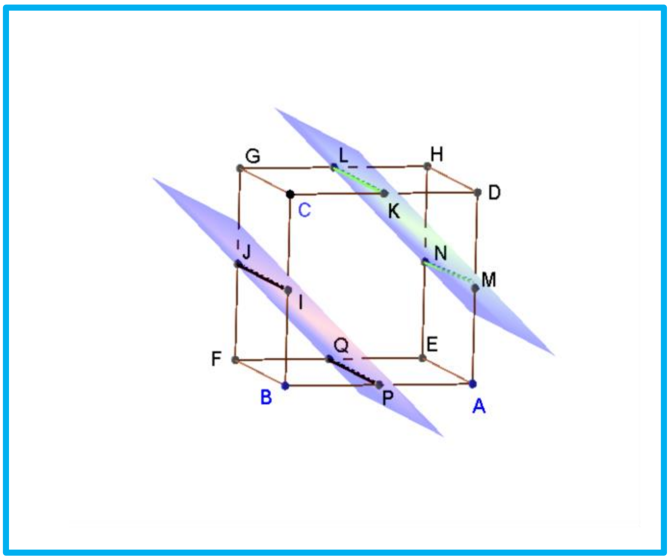
يكون المستقيم $D(A,\vec{u})$ موازيا للمستوى $P(B,\vec{v},\vec{w})$

إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية .

أو أيضا :

$$D(A,\vec{u}) \parallel P(B,\vec{v},\vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v}+y\vec{w} \;/\; x , y \in \mathbb{R}$$





03. المستويات المتوازية :

1. تعريف :

$P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $Q(B,\vec{u_1},\vec{v_1})$ مستويان متوازيان من الفضاء

إذا وفقط إذا كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u_1}$ مستوائية و كذلك $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u_2}$ مستوائية .

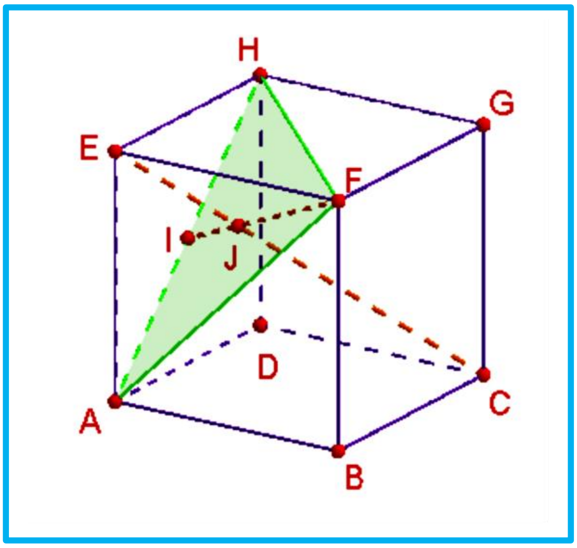
أو أيضا :

$$P(A,\vec{u},\vec{v}) \parallel Q(B,\vec{u_1},\vec{v_1}) \Leftrightarrow \left(\vec{u_1} = x\vec{v}+y\vec{w} \;/\; x , y \in \mathbb{R} \text{ و } \vec{u_2} = x'\vec{v}+y'\vec{w} / \; x' , y' \in \mathbb{R}\right)$$

03. تمرين :

ABCDEFGH مكعب لتكن I منتصف $[AH]$ و J نقطة من $[FI]$ حيث $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.

1. أنشئ الشكل .
2. بين أن $\vec{EC} = -\vec{AE}+\vec{AB}+\vec{AD}$.
3. بين أن : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$
4. ماذا يمكن أن نستنتج بالنسبة للنقط E و J و C.



جواب :

1. ننشئ الشكل .
2. نبين أن : $\vec{EC} = -\vec{AE}+\vec{AB}+\vec{AD}$

لدينا :

$$\vec{EC} = \vec{EA}+\vec{AB}+\vec{BC}$$
$$= -\vec{AE}+\vec{AB}+\vec{AD} \;;\; \left(\vec{BC} = \vec{AD}\right)$$

خلاصة : $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

3. نثبت أن : $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EJ}&=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ}\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FI}\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\right)\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\\
&=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\quad\left(\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}\right)\\
&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\
&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}\ ;\ \left(\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)
\end{aligned}$$

ومنه : $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ و بالتالي المتجهتين $\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستقيميتين .

خلاصة : $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

4. استنتاج للنقط E و J و C .

بما أن : $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ فإن المتجهتين $\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستقيميتين و منه النقط E و J و C مستقيمية .

خلاصة : النقط E و J و C مستقيمية .

Michel Chasles
(1793 - 1880)