

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقاق حلول مقترحة	سلسلة 1
تمرين 1: في كل التمرين سنرمز بـ (Δ) لمعادلة المماس في x_0		
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 3x + 1 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x+4)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} -x + 4 = 5$ إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = -1$ و لدينا : $f'(-1) = 5$ منه : $(\Delta): y = 5(x+1) - 3$ أي $(\Delta): y = 5x + 2$		
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x-3} + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{6x-12}{x-3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x-3} = -6$ إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 2$ و لدينا : $f'(2) = -6$ منه : $(\Delta): y = -6(x-2) - 4$ أي $(\Delta): y = -6x + 8$		
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+7-9}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3} = \frac{1}{3}$ إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$ و لدينا : $f'(1) = \frac{1}{3}$ منه : $(\Delta): y = \frac{1}{3}(x-1) + 3$ أي $(\Delta): y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$		
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$ إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا : $f'(0) = 5$ منه : $(\Delta): y = 5(x-0) + 0$ أي $(\Delta): y = 5x$		
$\left(t = x - \frac{p}{2} \right) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{2}\right)}{x - \frac{p}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos^2(x)}{x - \frac{p}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2\left(t - \frac{p}{2}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \times \frac{\sin(t)}{t} = 0 \times 1 = 0$ إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = \frac{p}{2}$ و لدينا : $f'\left(\frac{p}{2}\right) = 0$ منه : $(\Delta): y = 0$		
$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{8}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{8}\right)}{x - \frac{p}{8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{8}} \frac{\tan(2x) - \tan\left(\frac{p}{4}\right)}{x - \frac{p}{8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{8}} \frac{\tan\left(2x - \frac{p}{4}\right) \left(1 + \tan(2x) \times \tan\left(\frac{p}{4}\right)\right)}{x - \frac{p}{8}}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{8}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{8}\right)}{x - \frac{p}{8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{8}} 2 \frac{\tan\left(2x - \frac{p}{4}\right)}{2x - \frac{p}{4}} \times (1 + \tan(2x)) = 2 \times 1 \times 2 = 4$ إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = \frac{p}{8}$ و لدينا : $f'\left(\frac{p}{8}\right) = 4$ منه : $(\Delta): y = 4\left(x - \frac{p}{8}\right) + 1$ أي : $(\Delta): y = 4x + \frac{2-p}{2}$		
إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا : $x = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$		
دراسة قابلية الاشتقاق تعني دراسة النهاية : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ، في حالة كانت هذه النهاية عددا حقيقيا تكون معادلة المماس : $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ ورغم عدم قابلية الاشتقاق فمنحنى الدالة يقبل مماسا عموديا معادلته : $x = x_0$		

تمرين 2 :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$ إذن الدالة : $f(x) = \sqrt{1+x}$ قابلة للاشتقاق

في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسية لها في النقطة 0 هي : $h(x) = \frac{1}{2}(x-0)+1 = \frac{1}{2}x+1$

منه : $\sqrt{1,0002} = f(0,0002) \approx h(0,0002) \approx \frac{0,0002}{2} + 1 \approx 0,0001 + 1 \approx 1,0001$

و : $\sqrt{0,9996} = f(-0,0004) \approx h(-0,0004) \approx \frac{-0,0004}{2} + 1 \approx -0,0002 + 1 \approx 0,9998$

1

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1+x} = -1$ إذن الدالة : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك

تكون الدالة التآلفية المماسية لها في النقطة 0 هي : $h(x) = -(x-0)+1 = -x+1$

منه : $\frac{1}{1,015} = f(0,015) \approx -0,015 + 1 \approx 0,985$

2

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ إذن الدالة : $f(x) = \sin x$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسية

لها في النقطة 0 هي : $h(x) = x$

منه : $\sin(0,02) = f(0,02) \approx 0,02$ منه : $\cos 0,02 = \sqrt{1 - \sin^2(0,02)} \approx \sqrt{1 - 0,0004} \approx \sqrt{0,9996} \approx 0,9998$

3

ضمينيا في هذا السؤال وحدة القياس هي الراديان

لاحظ أننا استعملنا بعض نتائج السؤال الأول في الاستنتاج

تمرين 3 : في كل التمرين سنرمز ب (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا : $f'(0) = 0$ منه : $y = 0$: (Δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا : $f'(0) = \frac{1}{2}$ منه : $y = \frac{1}{2}x$: (Δ)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^3 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + x - 3) = -1$$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^3 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x - 2) = -1$$

و

بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$ فإن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$

و لدينا : $f'(0) = -1$ منه : $y = -(x-1)-3$ أي (Δ) : $y = -x-2$

صورة العدد 1 تم حسابها بالصيغة الأولى لأنها معرفة على مجال يحتوي على العدد 1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{-x}{x+1}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x+1} = -1$$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x} = -\infty$$

و

إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

في السنة الثانية بكالوريا دائما يسبق دراسة الاشتقاق في نقطة دراسة اتصالها في هذه النقطة، لكن مفهوم الاتصال لا يدس في هذه السنة، في المثال الأخير رغم أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ إلا أنه لا يوجد مماس عمودي بسبب عدم اتصال الدالة في الصفر.

تمرين 4 :

$$f'(x) = (-7x^3 + 13)' = -21x^2$$

$$f'(x) = (-5x^3 + 7x^2 - x)' = -15x^2 + 14x - 1$$

$$f'(x) = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = (\sin(x) + 3\cos(x))' = \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$f'(x) = (x \sin(x))'$$

$$f'(x) = x' \sin(x) + x(\sin(x))' = \sin x + x \cos x$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x-3}{4x+1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)'(4x+1) - (2x-3)(4x+1)'}{(4x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x+1) - 4(2x-3)}{(4x+1)^2} = \frac{14}{(4x+1)^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 1)(x^2 + 1) - 2x(2x^3 + x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 + 6x^2 + x^2 + 1 - 4x^4 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \left[\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x+2}{5x-1}\right)' = \frac{3(5x-1) - 5(3x+2)}{(5x-1)^2} = \frac{-13}{(5x-1)^2}$$

$$f'(x) = [(x^2 - 3)(4x - 5)]' = 2x(4x - 5) + 4(x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 12x^2 - 10x - 12$$

$$f'(x) = (-2x\sqrt{x})' = -2\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) = -2\frac{3x}{2\sqrt{x}} = -3\sqrt{x}$$

$$f'(x) = (\sqrt{2-3x})' = \frac{(2-3x)'}{2\sqrt{2-3x}} = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 2x + 2})' = \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$f'(x) = ((2x+3)^7)' = 7(2x+3)^6 (2x+3)'$$

$$f'(x) = 14(2x+3)^6$$

$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)'$ $f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 - x + 1) - (2x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$ $f'(x) = \frac{-4x^2 + 2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2} = f'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$	$f'(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x}}{2x - \sqrt{x}} \right)'$ $f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2x - \sqrt{x}) - \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x + \sqrt{x})}{(2x - \sqrt{x})^2}$
$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x} \right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-\frac{(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ $f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1-x}}{(1+x)^2}$	$f'(x) = (x(x^2 + 1)^2)' = 1 \times (x^2 + 1)^2 + x(2 \times 2(x^2 + 1))$ $f'(x) = x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^3 + 4x$
$f'(x) = (\sin^2 x + 2 \cos^2 x)'$ $f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2(2 \cos x (-\sin x))$ $f'(x) = -3 \sin x \cos x$	$f'(x) = \left(\tan 3x + 4 \sin \frac{x}{2} \right)'$ $f'(x) = 3 \times \frac{1}{\cos^2 3x} + 4 \times \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x} + 2 \cos \frac{x}{2}$
$f'(x) = [(\sin x + \cos x) \sin x]'$ $f'(x) = (\cos x - \sin x) \sin x + (\sin x + \cos x) \cos x$ $f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin^2 x + \cos^2 x$	$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$
$f'(x) = (\sin x \cos 2x)'$ $f'(x) = \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x$	$f'(x) = \left(\frac{2 + \cos x}{3 - \cos x} \right)'$ $f'(x) = \frac{-\sin x(3 - \cos x) - \sin x(2 + \cos x)}{(3 - \cos x)^2}$ $f'(x) = \frac{-5 \sin x}{(3 - \cos x)^2}$
أحيانا نتجاوز بعض التفاصيل لكونها واضحة أو سبق توضيحها في مثال سابق 🌱 للتذكير: 🌱 $(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ، $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$ ، $(u.v)' = u'v + u.v'$ ، $(u+v)' = u' + v'$ $(u(ax+b))' = a u'(ax+b)$	