

الاشتقاق

قابلية اشتقاق دالة في نقطة – تأويلات هندسية

(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'(a)$	$\Leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_d(a)$ و معادلته : $y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_d(a)$	$\Leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليمين
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_g(a)$ و معادلته : $y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_g(a)$	$\Leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليسار
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\Leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ ✓	$\Leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a, f(a))$ معاملاهما الموجهان $f'_d(a)$ و $f'_g(a)$ و النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة مزواة

- إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a, f(a))$

f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$
(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$	(C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$

$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$	$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$
---	---

الدالة المشتقة لدالة عددية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I .
نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a, b]$.
نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ ، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a, b[$ و قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في b .

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز بالرمز f' و المعرفة كما يلي :
$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

الدالة	الدالة المشتقة
αf	$\alpha f'$
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n	$nf'f^{n-1}$

المجال I	الدالة المشتقة f'	الدالة f
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
$I =]-\infty, 0[$ أو $I =]0, +\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I =]-\infty, 0[$ أو $I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$

- كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها .

- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ فإن f تزايدية على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ فإن f تناقصية على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعاً على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ فإن f تناقصية قطعاً على I

- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ وكانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعاً على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ وكانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعاً على I

الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
إذا كانت الدالة المشتقة f' قابلة للاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ، ونرمز لها بالرمز f'' .
إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثالثة (أو الدالة المشتقة من الرتبة 3) ، و يرمز لها ب f''' أو $f^{(3)}$.

المعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$

- ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.
- المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
 - كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$.

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم.

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y : x \mapsto \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

حالة خاصة :

إذا كان $\omega = 0$: حل المعادلة التفاضلية $y'' = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $y : x \mapsto ax + b$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$