درس : الدوران في المستوى

I. تذكير لبعض التحويلات الاعتيادية :

في هذا الدرس ننسب المستوى $(\mathcal{P})$ إلى م.م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر التطبيق f في $(\mathcal{P})$ (أو التحويل f في $(\mathcal{P})$) يحول نقطة M من $(\mathcal{P})$ إلى نقطة M' من $(\mathcal{P})$. أي :

$$\begin{aligned} f : (\mathcal{P}) &\to (\mathcal{P}) \\ M &\mapsto f(M)=M' \end{aligned}$$

. حيث التحويل f يحقق العلاقة التالية :

A. التحويل هو إزاحة: la translation (العلاقة هي: $\overrightarrow{MM'}$ متجهة ثابتة)

1. تعريف :

$\vec{u}$ متجهة معلومة (ثابتة) من المستوى $(\mathcal{P})$.

التطبيق f في $(\mathcal{P})$ (أو التحويل f في $(\mathcal{P})$) الذي يحول نقطة M إلى نقطة M' حيث : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ يسمى إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ و نرمز له ب: $f=t_{\vec{u}}$.

إذن : $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

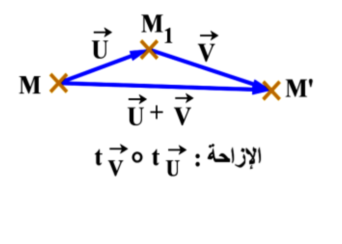
2. خاصية:

$t_{\vec{u}}$ و $t_{\vec{v}}$ إزاحتين في المستوى $(\mathcal{P})$.

أ- $t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$ مركبة إزاحتين $t_{\vec{u}}$ و $t_{\vec{v}}$ هي إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ و نكتب $t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

ب- $t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}$.

ج- كل إزاحة $t_{\vec{u}}$ في $(\mathcal{P})$ هي تقابل في $(\mathcal{P})$ و تقابلها العكسي هو $\left(t_{\vec{u}}\right)^{-1}=t_{-\vec{u}}$.



3. برهان :

* لتكن M نقطة من $(\mathcal{P})$ حيث : $t_{\vec{u}}:M\to t_{\vec{u}}(M)=M'$ مع $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$ و $t_{\vec{v}}:M\to t_{\vec{v}}(M')=M''$ مع $\vec{v}=\overrightarrow{M'M''}$

إذن : $t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}(M)=t_{\vec{v}}\left(t_{\vec{u}}(M)\right)=t_{\vec{v}}(M')=M''$ مع $\overrightarrow{MM''}=\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'M''}=\vec{u}+\vec{v}$ و منه $\overrightarrow{MM''}$ ثابتة .

خلاصة : $t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$ إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$.

- تقابل : $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M}=-\vec{u} \Leftrightarrow t_{-\vec{u}}(M')=M$

B. التحويل هو : تحاكي. l'homothétie (العلاقة هي $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$)

1. تعريف:

Ω نقطة معلومة من $(\mathcal{P})$ و $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

التطبيق f في $(\mathcal{P})$ (أو التحويل f في $(\mathcal{P})$) يحول نقطة M إلى نقطة M' حيث : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ يسمى تحاكي مركزه Ω و نسبته k . نرمز للتحاكي ب : $h(\Omega,k)$.

إذن : $h_{(\Omega,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

2. خاصية :

$h(\Omega,k)$ هو تقابل في $(\mathcal{P})$ و تقابله العكسي هو $h^{-1}\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)$.

3. ملحوظة :

النقط : A و A' و Ω مستقيمية

- $k \in]0,1[$: لدينا $A' \in]\Omega A[$.
- $k \in]1,+\infty[$: لدينا $A' \in [\Omega A)$ و لكن خارج القطعة $[\Omega A]$.
- $k \in]-\infty,0[$: لدينا $A' \in]A,\Omega)$ و لكن خارج القطعة $[\Omega A]$.

C. التحويل هو تماثل محوري symétrie axiale: (العلاقة هي (D) واسط القطعة $[MM']$)

1. تعريف :

(D) مستقيم معلوم من المستوى $(\mathcal{P})$.
التطبيق f في $(\mathcal{P})$ (أو التحويل f في $(\mathcal{P})$) يحول نقطة M إلى نقطة M' حيث : (D) واسط القطعة $[MM']$ يسمى تماثل محوري الذي محوره (D) و نرمز له ب : $S_{(D)}$.
إذن : $S_{(D)}(M) = M'$ يكافئ (D) واسط القطعة $[MM']$.

2. خاصية :

$S_{(D)}$ تقابل في المستوى $(\mathcal{P})$ و تقابله العكسي S^{-1} هو $\left(S_{(D)}\right)^{-1} = S_{(D)}$. ($S_{(D)} \circ S_{(D)} = Id_{(\mathcal{P})}$)

D. التماثل المركزي symétrie centrale: (العلاقة هي Ω منتصف القطعة $[MM']$)

3. تعريف :

Ω نقطة معلوم من المستوى $(\mathcal{P})$.
التطبيق f في $(\mathcal{P})$ (أو التحويل f في $(\mathcal{P})$) يحول نقطة M إلى نقطة M' حيث : Ω منتصف القطعة $[MM']$ يسمى تماثل مركزي الذي مركزه النقطة Ω و نرمز له ب : S_{Ω}.
إذن : $S_{\Omega}(M) = M'$ يكافئ Ω منتصف القطعة $[MM']$.

4. ملحوظة :

Ω منتصف القطعة $[MM'] \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

$S_{\Omega} = h(\Omega,-1)$ هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته $k=-1$.

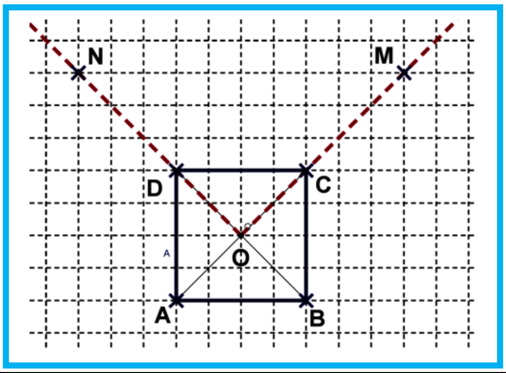
5. خاصية :

S_{Ω} تقابل في المستوى $(\mathcal{P})$ و تقابله العكسي S^{-1} هو $(S_{\Omega})^{-1} = S_{\Omega}$. ($S_{\Omega} \circ S_{\Omega} = Id_{(\mathcal{P})}$)

II. الدوران – الدوران العكسي:

A. الدوران :

1. نشاط :



ننشئ مربع $(ABCD)$ مركزه O. M و N نقطتان من $(\mathcal{P})$ حيث :
$N \in [BO]$ و $M \in [AO]$ و (OMN) مثلث متساوي الساقين في O .
لنعتبر التطبيق r في $(\mathcal{P})$ حيث: $r: A \to B$; $r: B \to C$
$r: D \to A$; $r: C \to D$ و $r: M \to N$

1. حسب ما سبق كيف ننشئ N' حيث $r: N \to N'$.

2. حسب ما سبق أتمم التكافؤ الاتي : $r : N \to N' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{.......................} \\ \text{.......................} \end{cases}$

2. مفردات :

- N' تسمى صورة النقطة.
- التطبيق r يسمى الدوران الذي مركزه O وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.
- النقطة N' تسمى صورة النقطة N بالدوران r .

3. تعريف:

لتكن O نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ الموجه توجيها مباشرا. α عدد حقيقي.

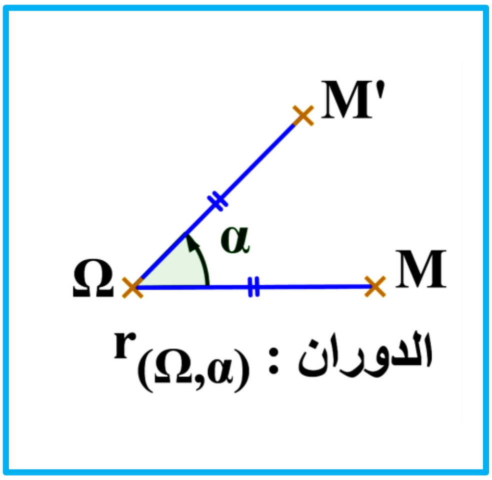
التطبيق r في المستوى $(\mathcal{P})$ حيث يحول M إلى M' مع

- إذا كان $M = O$ فإن $M'=O$. (أي M صامدة بالتطبيق r)
- إذا كان $M \neq O$. M' تحقق ما يلي:

$OM = OM'$ و $\left(\overline{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \alpha \ (2\pi)$.

الدوران r نرمز له ب : $r(O,\alpha)$

إذن : $r_{(\Omega,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases}$



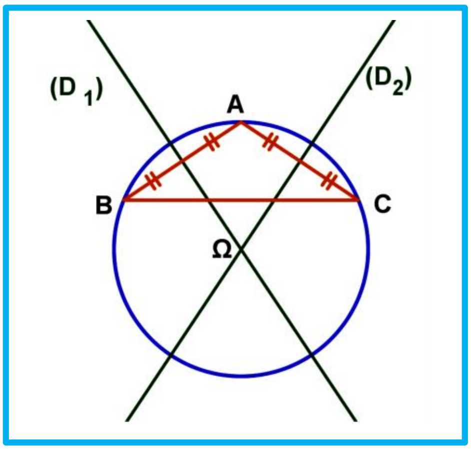
4. أمثلة :

- مثال 1 :

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A ونضع $\left(\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \alpha \ [2\pi]$. ليكن الدوران r حيث $r(B) = A$ و $r(A) = C$

حدد مركزه Ω و قياس زاويته β .

جواب :



مركزه : لتكن Ω مركز الدوران r .

بما أن: $r(B) = A$ إذن : $\Omega B = \Omega A$ و منه Ω تنتمي إلى (D_1) واسط $[AB]$.

بما أن: $r(A) = C$ إذن : $\Omega A = \Omega C$ و منه Ω تنتمي إلى (D_2) واسط $[AC]$.

و منه : Ω هي تقاطع الواسطين (D_1) و (D_2). نعلم أن واسطات مثلث تتلاقى.

خلاصة 1: Ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

زاويته :

لدينا: $r(B) = A \Rightarrow \left(\overline{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}}\right) \equiv 2\left(\overline{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv 2\alpha \ [2\pi]$

خلاصة 2: 2α هو قياس لزاوية الدوران r .

خلاصة : الدوران r مركزه Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و قياس زاويته 2α أي $r(\Omega, 2\alpha)$.

- مثال 2 :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م.م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقطتين $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1. لنعتبر الدوران $r(O,\alpha)$. حدد α قياس زاوية الدوران r حيث يحول A إلى B.

جواب :

1. نحدد α قياس زاوية الدوران حيث O مركز الدوران:

لدينا : $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}}{1\times1}=\dfrac{1}{2}$ و $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}}{1\times1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{1}{2}$ و $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

خلاصة : قياس زاوية الدوران هو $\dfrac{\pi}{6}$.

- مثال 3 :

نعتبر التطبيق $f:\ \begin{array}{l}(\mathcal{P})\to(\mathcal{P})\\ M(x,y)\mapsto f(M)=M'(x',y')\end{array}$ حيث : $\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}$.

1. بين أن f له نقطة صامدة واحدة فقط O حددها .
2. أ - قارن : $OM=OM'$. ب – حدد قياسات الزاوية الموجهة : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)$.
3. استنتج : طبيعة التطبيق f .

جواب :

1. نحدد النقط الصامدة :

$M(x,y)$ نقطة من $(\mathcal{P})$ صامدة إذن $f(M)=M$ إذن $\begin{cases}x=x'\\ y=y'\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x=x'=-y\\ y=y'=x\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-y\\ y=x\end{cases}$ أي $x=y=-y$ و بالتالي $x=y=0$.

خلاصة : $O(0,0)$ هي النقطة الصامدة الوحيدة.

2. أ – نقارن : $OM=OM'$.

$OM=\sqrt{x^2+y^2}$ و $OM'=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{(-y)^2+x^2}=\sqrt{y^2+x^2}$ ومنه : $OM=OM'$. (1)

ب – نحدد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)$.

لدينا: $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}}{x^2+y^2}=1$

$$\cos\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|}=\dfrac{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}}{x^2+y^2}=0$$

ومنه $\sin\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=1$ و $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=0$ إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. (2)

خلاصة : قياس زاوية الدوران هو $\dfrac{\pi}{2}$.

3. طبيعة التحويل : حسب (1) و (2) نستنتج أن التطبيق f هو دوران $r\left(O,\dfrac{\pi}{2}\right)$

5. ملاحظة:

- $r(\Omega,\alpha)$ دوران من المستوى $(\mathcal{P})$ لدينا $r(\Omega)=\Omega$ إذن O صامدة بالدوران $r(\Omega,\alpha).r$.
- $r(M)=M'$ إذن $\Omega M=\Omega M'$ ومنه المركز Ω ينتمي إلى واسط القطعة $[MM']$.
- $r(\Omega,\alpha)$ دوران حيث $\alpha=0$ لدينا لكل M من $(\mathcal{P})$: $r(M)=M$ جميع نقط $(\mathcal{P})$ صامدة ب r.
  r يسمى التطبيق المطابق في $(\mathcal{P})$. إذن : $r(\Omega,\alpha=0)=Id_{(\mathcal{P})}$
- $r(\Omega,\alpha)$ دوران حيث : $\alpha=\pi$ هو التماثل المركزي الذي مركزه Ω أي $r(\Omega,\pi)=S_\Omega$

B. الدوران العكسي :

1. خاصية و تعريف :

الدوران $r(\Omega,\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في $(\mathcal{P})$ وتقابله العكسي r^{-1} هو $r^{-1}=r(\Omega,-\alpha)$. الذي مركزه Ω و زاويته $-\alpha$.
و هو يسمى الدوران العكسي للدوران r .
إذن : $r(M)=M'\Leftrightarrow r^{-1}(M')=M$

2. برهان :

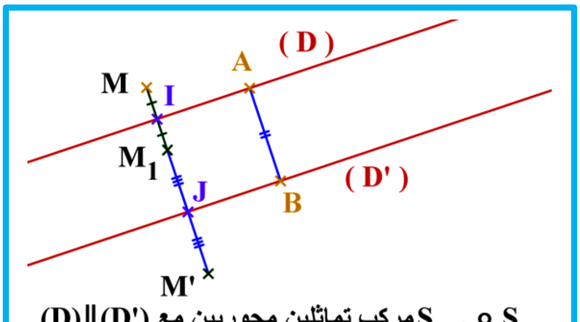
لتكن M نقطة من $(\mathcal{P})$.
لدينا :

$$r_{(\Omega,\alpha)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\alpha\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}})\equiv-\alpha\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow r_{(\Omega,-\alpha)}(M')=M\Leftrightarrow r_{(\Omega,-\alpha)}=r^{-1}$$

III. مركب تماثلين محوريين $S_{(D)}$ و $S_{(D')}$:

1. مركب تماثلين محوريين $S_{(D)}$ و $S_{(D')}$:

أ- حالة 1 : (D) و (D') متوازيان : $[(D')\parallel(D)]$.



$(D)\parallel(D')$ مركب تماثلين محوريين مع $S_{D'}\circ S_D$

نعتبر (D) و (D') مستقيمين متوازيين قطعا.
نعتبر نقطة A من المستقيم (D) و B المسقط العمودي ل A على (D').
لتكن M نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث :

$$S_{(D')}:M_1\to M'\text{ و }S_{(D)}:M\to M_1$$

و منه : $S_{(D')}\circ S_{(D)}:M\xrightarrow{S_{(D)}}M_1\xrightarrow{S_{(D')}}M'$

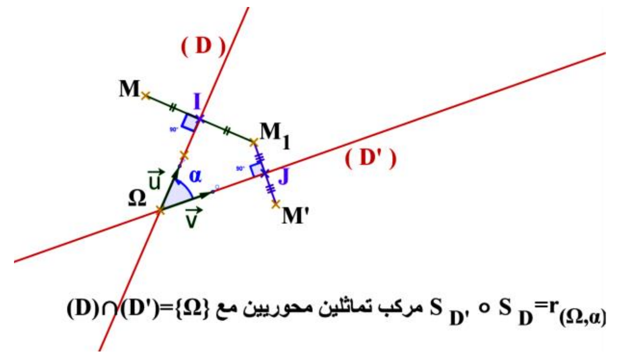
نعتبر I و J منتصفي $[MM_1]$ و $[M_1M']$.
من جهة أخرى : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M'}=2\overrightarrow{IM_1}+2\overrightarrow{M_1J}=2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AB}$.
المتجهة $2\overrightarrow{AB}$ ثابتة إذن المتجهة $\overrightarrow{MM'}$ ثابتة ومنه التحويل $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ هو إزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AB}$.
خلاصة : $S_{(D')}\circ S_{(D)}=t_{2\overrightarrow{AB}}$

ب- حالة 2 : (D) و (D') متقاطعان: $[(D')\cap(D)=\{\Omega\}]$

نعتبر (D) و (D') مستقيمين متقاطعين في Ω و موجهين على التوالي ب : $\vec{u}$ و $\vec{v}$. M نقطة من $(\mathcal{P})$ و $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv\alpha\ [2\pi]$

- حالة $M=\Omega$: إذن $S_{(D')}\circ S_{(D)}(\Omega)=\Omega$.

▪ حالة $M \neq \Omega$: نضع $S_{(D)} : M \to M_1$ و $S_{(D')} : M_1 \to M'$.



لدينا :

-1 $\Omega M = \Omega M_1 = \Omega M'$.

-2 $\overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})} \equiv \overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1})} + \overline{(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M'})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\overline{(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega M_1})} + 2\overline{(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega J})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\overline{(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega J})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\overline{(\vec{u},\vec{v})}\ [2\pi]$

$\equiv 2\alpha\ [2\pi]$

و بالتالي : $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ هو الدوران الذي مركزه Ω و قياس زاويته $2\overline{(\vec{u},\vec{v})}$.

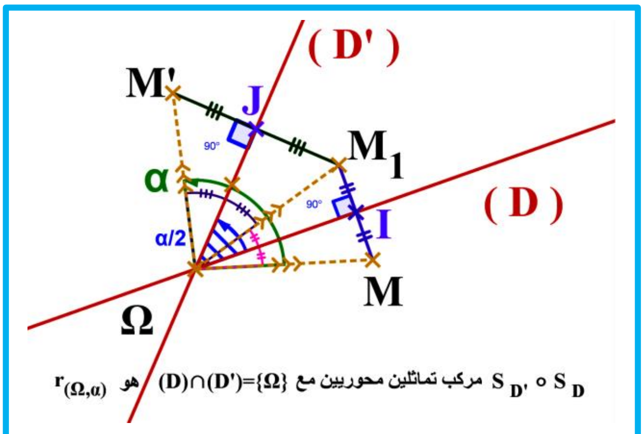
2. خاصية :

نعتبر (D) و (D') مستقيمين من المستوى $(\mathcal{P})$ موجهين على التوالي ب : $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

أ- إذا كان : $(D) \parallel (D')$ فإن التحويل $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ هو إزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AB}$. حيث $A \in (D)$ و B المسقط العمودي ل A على (D')

ب- إذا كان : $(D) \cap (D') = \{\Omega\}$ فإن التحويل $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ هو الدوران الذي مركزه Ω و قياس زاويته $2\times\overline{(\vec{u},\vec{v})} = 2\alpha$.

IV. تفكيك دوران إلى مركب تماثلين محوريين:



1. نشاط :

نعتبر دوران $r(\Omega,\alpha)$ و (D) مستقيم من $(\mathcal{P})$ يمر من Ω .

كيف نختار مستقيم (D') حيث $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r(\Omega,\alpha)$ ؟

جواب :

نختار (D') حيث (D') يمر من Ω و $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\alpha}{2}\ [\pi]$.

و منه : $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r\left(\Omega, 2\times\frac{\alpha}{2}\right) = r(\Omega,\alpha)$.

2. خاصية :

كل دوران $r(\Omega,\alpha)$ يمكن كتابته على شكل مركب تماثلين محوريين $S_{(D)}$ و $S_{(D')}$ حيث : $S_{(D')} \circ S_{(D)} = r(\Omega,\alpha)$ مع (D) و (D') مستقيمين من المستوى $(\mathcal{P})$ موجهين على التوالي ب : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $(D) \cap (D') = \{\Omega\}$ و $\overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\alpha}{2}\ [\pi]$.

V. خاصيات الدوران

1. نشاط :

كيف نستنتج خاصيات الدوران ؟ ثم أذكر هذه الخاصيات.

جواب :

نستنتج خاصيات الدوران من خلال أن الدوران هو مركب تماثلين محوريين. نعلم بأن التماثل المحوري يحافظ : المسافات – التعامد ......

- إذن الدوران يحافظ على المسافات – قياس الزوايا - التوازي – التعامد – معامل الإستقامية –
- إذن الدوران يحافظ على صور الأشكال الهندسية (صورة مستقيم هي مستقيم ....)

بالتالي نستنتج الخاصيات التالية :

2. خاصيات :

$r(O,\alpha)$ دوران من المستوى $(\mathcal{P})$.مع A و B و C و D و G نقط من (P) و A' و B' و C' و D' و G' صورهما على التوالي ب r

- صورة القطعة $[AB]$ ب r هي القطعة $[A'B']$ والقطعتين متقايستين .الدوران يحافظ على المسافات.

كل تطبيق في $(\mathcal{P})$ يحافظ على المسافات فهو يسمى تقايس Isométrie في المستوى. (أمثلة : إزاحة – تماثل محوري و مركزي – دوران) في الحالة الأخرى فهو يسمى تشابه Similitude . (مثال : التحاكي).

- يحافظ على المرجح :صورة G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$ هي G' مرجح النظمة المتزنة $\{(A',a),(B',b)\}$. (أو لثلاثة نقط متزنة أو لأربع نقط متزنة أو ....).

كل تطبيق في $(\mathcal{P})$ يحافظ على المرجح فهو يسمى تطبيق تآلفي Affine .

- الدوران يحافظ على الأشكال الهندسية .
  - صورة نصف مستقيم $[A,B)$ ب r هي نصف المستقيم $[A',B')$
  - صورة المستقيم (AB) ب r هو المستقيم $(A'B')$.
  - صورة الدائرة $C(A,r)$ ب r هي الدائرة $C'(A',r)$
- الدوران r يحافظ على التوازي: $(AB)\parallel(\Delta)$ لدينا $(A'B')\parallel(\Delta')$.
- الدوران r يحافظ على التعامد : $(AB)\perp(\Delta)$ لدينا $(A'B')\perp(\Delta')$.
- يحافظ على الإستقامية و على معامل الإستقامية
  - صورة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ب r هي $\overrightarrow{A'B'}$.
  - إذا كان $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$
- الدوران يحافظ على الزوايا الموجهة :لدينا : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha(2\pi)$.
  - صورة الزاوية $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ ب r هي الزاوية $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)$ و $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}\right)}\ [2\pi]$

VI. مركب دورانين :

1. خاصية :

$r_1(\Omega_1,\alpha_1)$ و $r_2(\Omega_2,\alpha_2)$ دورانان من المستوى $(\mathcal{P})$.

أ- r_1 و r_2 لهما نفس المركز $\Omega_1=\Omega_2$:

التحويل $r_1\circ r_2$ هو دوران مركزه $\Omega=\Omega_2=\Omega_1$ و قياس زاويته هي $\alpha=\alpha_2+\alpha_1$.

إذن : $r_2\circ r_1=r(\Omega_1,\alpha_1+\alpha_2)$.

ب- r_1 و r_2 ليس لهما نفس المركز $\Omega_2\neq\Omega_1$:

- إذا كان : $\alpha_2+\alpha_1=2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ فإن التحويل $r_2\circ r_1$ هو إزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_1'}$ مع $r_2(\Omega_1)=\Omega_1'$
- إذا كان : $\alpha_2+\alpha_1\neq 2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ فإن التحويل $r_2\circ r_1$ هو دوران مركزه Ω و قياس زاويته هي $\alpha=\alpha_2+\alpha_1$.

مع $(D)=(\Omega_2\Omega_1)$ (المستقيم المار من المركزين Ω_1 و Ω_2) و $r_1=S_{(D)}\circ S_{(D_1)}$ و $r_2=S_{(D_2)}\circ S_{(D)}$ و $(D_1)\cap(D_2)=\{\Omega\}$.

2. برهان :

أ- حالة أ :

لتكن M نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ نضع : $r_1(\Omega_1,\alpha_1) : M \to M_1$ و $r_2(\Omega_2,\alpha_2) : M_1 \to M'$.

لدينا :

1. $\Omega_1 M_1 = \Omega_1 M$ و $\Omega_2 M' = \Omega_2 M_1$.

2. $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega_1 M},\overrightarrow{\Omega_1 M'}\right)} \equiv \overline{\left(\overrightarrow{\Omega_1 M},\overrightarrow{\Omega_1 M_1}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{\Omega_1 M_1},\overrightarrow{\Omega_1 M'}\right)} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \ [2\pi]$

التحويل $r_2 \circ r_1$ هو دوران مركزه $\Omega = \Omega_2 = \Omega_1$ و قياس زاويته هي $\alpha = \alpha_2 + \alpha_1$.

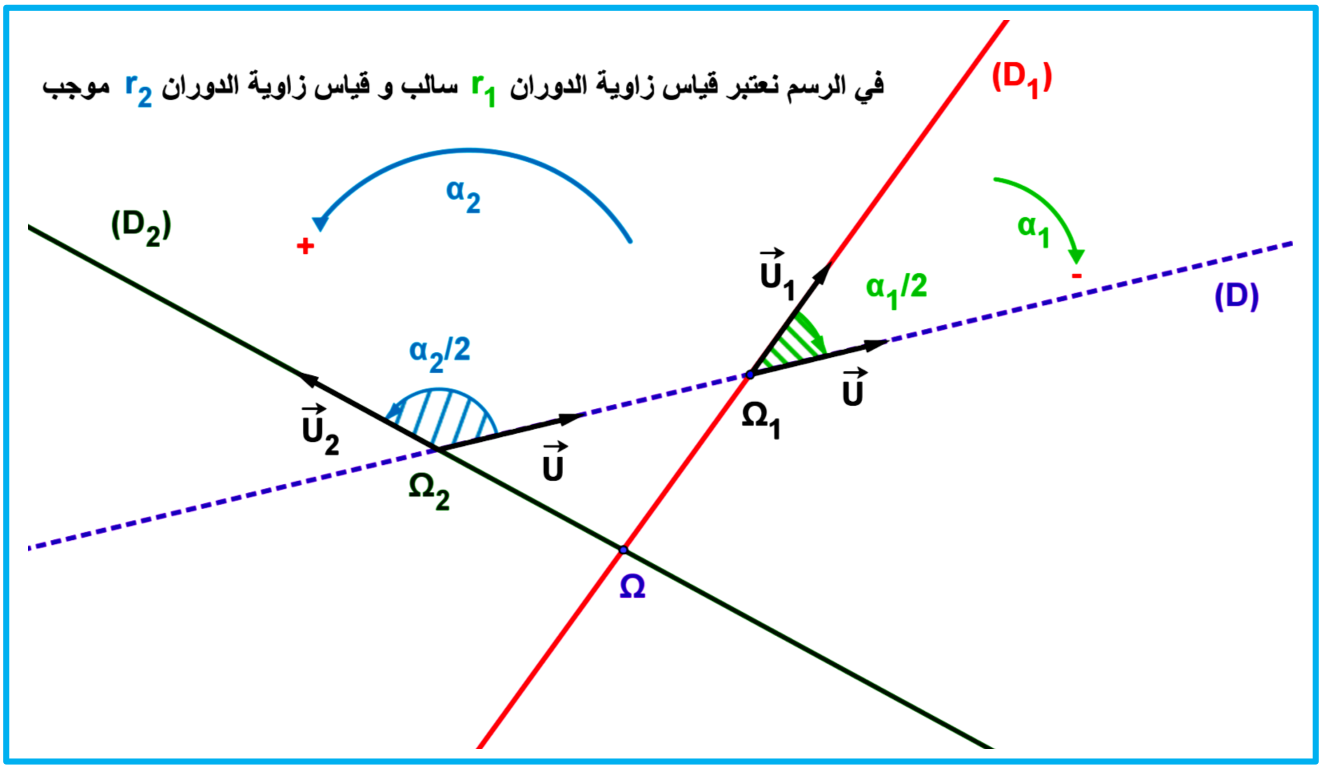
إذن : $r_2 \circ r_1 = r(\Omega_1, \alpha_1 + \alpha_2)$.

ب- r_1 و r_2 ليس لهما نفس المركز $\Omega_2 \neq \Omega_1$:

ليكن $(D) = (\Omega_2\Omega_1)$ (المستقيم المار من المركزين Ω_1 Ω_2)

و نعتبر $r_1 = S_{(D)} \circ S_{(D_1)}$ و $r_2 = S_{(D_2)} \circ S_{(D)}$ و $(D_1) \cap (D_2) = \{\Omega\}$.

حيث : $\left.\begin{matrix} (D)\cap(D_1) = \{\Omega_1\} \\ \overline{\left(\vec{u_1},\vec{u}\right)} \equiv \dfrac{\alpha_1}{2} \ [\pi] \end{matrix}\right\}$ و $\left.\begin{matrix} (D)\cap(D_2) = \{\Omega_2\} \\ \overline{\left(\vec{u},\vec{u_2}\right)} \equiv \dfrac{\alpha_2}{2} \ [\pi] \end{matrix}\right\}$



$r_2 \circ r_1 = \left(S_{(D_2)} \circ S_{(D)}\right) \circ \left(S_{(D)} \circ S_{(D_1)}\right) = S_{(D_2)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D_1)} = S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$ (تركيب تطبيقات تجمعي).

$\overline{\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)} \equiv \overline{\left(\vec{u_1},\vec{u}\right)} + \overline{\left(\vec{u},\vec{u_2}\right)} \equiv \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \ [\pi]$.

- حالة 1 : $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$. ومنه : $\overline{\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)} \equiv 0 \ [\pi]$ إذن $(D_1) \parallel (D_2)$ و منه التحويل $r_2 \circ r_1$ هو إزاحة .
- حالة 2 : $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

$\overline{\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)} \not\equiv 0 \ [\pi]$ إذن $(D_1) \cap (D_2)$ متقاطعان نأخذ نقطة تقاطعهما هي Ω $\left((D_1)\cap(D_2) = \{\Omega\}\right)$ و منه التحويل $r_2 \circ r_1$ هو دوران مركزه Ω و قياس زاويته α حيث $\alpha = \alpha_2 + \alpha_1$