

النهايات

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ تكافئ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ تكافئ $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ تكافئ $\forall B < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq B$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ تكافئ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ تكافئ $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, -\alpha < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ تكافئ $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ تكافئ $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, -\alpha < x - a < 0 \Rightarrow f(x) \geq A$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ تكافئ $\forall B < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) \leq B$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ تكافئ $\forall B < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, -\alpha < x - a < 0 \Rightarrow f(x) \leq B$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ تكافئ $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D_f, (x \geq A) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ تكافئ $\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in D_f, (x \leq B) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ تكافئ $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ تكافئ $\forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ تكافئ $\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in D_f, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ تكافئ $\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in D_f, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$

نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

▪ لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بنفس الطريقة يمكنك التعبير عن الحالات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

• لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases}$

نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$ وليكن l عددا حقيقيا.
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty, b]$ حيث $b \in \mathbb{R}$ وليكن l' عددا حقيقيا.
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l' عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$.

• $n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

• $n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

- لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا.
- إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ يكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ يكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$

النهايات المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

- لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين بحيث f معرفة على مجال على الشكل $]a - \alpha, a + \alpha[$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ أو على مجموعة على الشكل $]a - \alpha, a + \alpha[- \{a\}$
- إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى العدد a ، فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

- لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.
- إذا كانت f تقبل نهاية l في a ، فإن هذه النهاية وحيدة.

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

لتكن f دالة عددية و a عددا حقيقيا .
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a ، فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.
▪ إذا كان $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$
▪ إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ (على التوالي إلى $-\infty$) عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ (على التوالي $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$)
▪ نعرف بنفس الطريقة النهاية على اليسار لدالة في نقطة.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

• إذا كان n زوجيا غير منعدم ، فإن :
• إذا كان n فرديا غير منعدم ، فإن :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$n \in \mathbb{N}^*; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

لتكن f دالة عددية .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l \text{ يكافئ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

العمليات على النهايات

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نهاية دالة حدودية – نهاية دالة جذرية

- لتكن P و Q دالتين حدوديتين و x_0 عددا حقيقيا .
 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ •
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ في حالة $Q(x_0) \neq 0$ •
- وإذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي P و Q الأكبر درجة ، فإن :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$ •
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$ •
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ •
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ •

نهاية الدوال اللاجذرية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a, +\infty[$ بحيث : $(\forall x \in [a, +\infty[); f(x) \geq 0$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

هذه الخاصية تبقى صالحة إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار

نهايات الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a : \text{ لكل } a \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a : \mathbb{R}^* \text{ لكل } a \text{ من } \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a : \text{ لكل } a \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{ حيث } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{) لكل } \blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \blacksquare$$

النهايات والترتيب

ليكن I مجالا من النوع $[a, +\infty[$ و l عددا حقيقيا ولتكن f و u و v دوال عددية معرفة على المجال I .

$$(1) \text{ إذا كان : } \begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \text{ فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$(2) \text{ إذا كان : } \begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases} \text{ فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$(3) \text{ إذا كان : } \begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \text{ فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$(4) \text{ إذا كان : } \begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \end{cases} \text{ فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ (مبرهنة الدرك)}$$

تبقى هذه الخصائص تبقى صالحة إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار