

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم

صفحة

التاريخ: 23:03 2015-01-26



01. التمرين الاول :-

1. أحسب u_0 و u_1 و v_0 و v_1 .

$$\text{لدينا : } u_0 = \frac{1}{4}(2^0 + 4 \times 0 - 5) = -1 \text{ و } u_1 = \frac{1}{4}(2^1 + 4 \times 1 - 5) = \frac{1}{4}$$

$$v_0 = \frac{1}{4}(2^0 - 4 \times 0 + 5) = \frac{3}{2} \text{ و } v_1 = \frac{1}{4}(2^1 - 4 \times 1 + 5) = \frac{3}{4}$$

2. أ- نبين أن المتتالية a_n هندسية و أساسها 2 :
لدينا :

$$a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}(2^{n+1} + 4(n+1) - 5) + \frac{1}{4}(2^{n+1} - 4(n+1) + 5)$$

$$= \frac{1}{4} \times 2^{n+1}$$

$$= 2^n$$

$$\text{إذن : } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

خلاصة : المتتالية a_n هندسية و أساسها 2 :

$$\text{ب- نحسب المجموع } S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

بما أن a_n هندسية و أساسها 2 :
لدينا :

$$S_1 = a_0 \times \frac{1 - 2^{n-0+1}}{1 - 2}$$

$$= (u_0 + v_0) \times (-1 + 2^{n-0+1})$$

$$= \frac{1}{2} \times (-1 + 2^{n+1})$$

$$= 2^n - \frac{1}{2}$$

3. أ- نبين أن المتتالية b_n حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

$$b_{n+1} - b_n = (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{4}(8n - 2 - 8n + 16) = 2$$

خلاصة : b_n متتالية حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

ب- نحسب المجموع $S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

لدينا :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n \\ &= \frac{b_0 + b_n}{2} \times (n - 0 + 1) \\ &= \left(-\frac{5}{2} + 2n - \frac{5}{2} \right) \frac{n+1}{2} \\ &= \left(n - \frac{5}{2} \right) (n+1) \end{aligned}$$

4. نستنتج المجموعين : $S_3 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_4 = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

لدينا : $a_n + b_n = 2u_n$ ومنه : $u_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{a_0 + b_0}{2} + \frac{a_1 + b_1}{2} + \dots + \frac{a_n + b_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \frac{1}{2} \times (S_1 + S_2) \\ &= 2^{n-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(n - \frac{5}{2} \right) (n+1) \\ &= 2^{n-1} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

لدينا : $a_n - b_n = 2v_n$ ومنه : $u_n = \frac{a_n - b_n}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{a_0 - b_0}{2} + \frac{a_1 - b_1}{2} + \dots + \frac{a_n - b_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \frac{1}{2} \times (S_1 - S_2) \\ &= 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(n - \frac{5}{2} \right) (n+1) = 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{4} n + 1 \end{aligned}$$

خلاصة : $S_4 = 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{4} n + 1$ و $S_3 = 2^{n-1} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n - \frac{3}{2}$

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

02. التمرين الثاني:-

1. أحسب u_1 و u_2 .

$$\text{لدينا : } u_1 = \frac{2u_0}{3 + \sqrt{u_0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } u_2 = \frac{2u_1}{3 + \sqrt{u_1}} = \frac{1}{3 + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{6 - \sqrt{2}}{17}$$

2. نبين أن : $u_n > 0$; $\forall n \geq 0$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.لدينا : $u_0 = 1 > 0$ ومنه العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.نفترض أن أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n > 0$.نبين أن العلاقة صحيحة لـ $n + 1$
لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2u_n > 0 \\ 3 + \sqrt{u_n} > 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

ومنه العلاقة صحيحة لـ $n + 1$.خلاصة : $u_n > 0$; $\forall n \geq 0$ 3. نبين أن : u_n تناقصية :

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} - u_n$$

$$= -\frac{u_n(1 + \sqrt{u_n})}{3 + \sqrt{u_n}} < 0 \quad (\text{لأن } u_n > 0)$$

ومنه : $u_{n+1} < u_n$ خلاصة : u_n تناقصية .4. أ - نبين أن : $u_{n+1} < \frac{2}{3}u_n$

لدينا :

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم

صفحة



التاريخ: 23:03 2015-01-26

$$\begin{aligned}
 3 + \sqrt{u_n} > 3 &\Rightarrow \frac{1}{3 + \sqrt{u_n}} \leq \frac{1}{3} \\
 &\Rightarrow \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} \leq \frac{2u_n}{3} \\
 &\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{3}
 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \quad \text{خلاصة :}$$

$$\text{ب - نستنتج أن } u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \quad \text{لدينا :}$$

$$u_1 \leq \frac{2}{3} u_0 \quad \text{من أجل } n=0 \text{ نحصل على}$$

$$u_2 \leq \frac{2}{3} u_1 \quad \text{من أجل } n=1 \text{ نحصل على}$$

$$u_3 \leq \frac{2}{3} u_2 \quad \text{من أجل } n=2 \text{ نحصل على}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{n-1} \leq \frac{2}{3} u_{n-2} \quad \text{من أجل } n-2 \text{ نحصل على}$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1} \quad \text{من أجل } n-1 \text{ نحصل على}$$

المتفاوتات حدودها موجبة جذاؤها طرف بطرف نحصل بعد الاختزال على :

$$(u_0 = 1 \text{ : ونعلم أن :}) \quad u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times u_0$$

$$\text{إذن : } u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ ولدينا } u_n > 0 \text{ حسب ما سبق ومنه : } 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{خلاصة :}$$

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

التمرين 3: 03

1. أحسب u_1 و u_2 .

$$\text{لدينا : } u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{4}{3}$$

$$\text{خلاصة : } u_1 = \frac{1}{2} \text{ و } u_2 = \frac{4}{3}$$

2. نبين أن : $0 \leq u_n \leq 3$; $\forall n \geq 0$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.لدينا : $u_0 = 3$ و منه $0 \leq u_0 \leq 3$ ومنه العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.نفترض أن أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0 \leq u_n \leq 3$.نبين أن العلاقة صحيحة لـ $n+1$

لدينا :

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq u_n + 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_n} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

ومنه العلاقة صحيحة لـ $n+1$.خلاصة : $0 \leq u_n \leq 3$; $\forall n \geq 0$ 3. أ- أحسب v_0 و v_1 .

$$\text{لدينا : } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5} \text{ و } v_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\frac{1}{5}$$

ب- نبين أن المتتالية v_n هندسية وأساسها $q = -\frac{1}{2}$:

لدينا :

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{2+2+2u_n}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = -\frac{1}{2} \times \frac{u_n-1}{4+2u_n} = -\frac{1}{2} \times v_n$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2} \times v_n \quad \text{إذن}$$

خلاصة : المتتالية a_n هندسية و أساسها $q = -\frac{1}{2}$:

ج - كتابة u_n و v_n بدلالة n .

• نكتب u_n بدلالة n .

بما أن a_n هندسية و أساسها $q = -\frac{1}{2}$:

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} ; (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{خلاصة :}$$

• نكتب u_n بدلالة n .

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n-1$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1} = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$$

$$(v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n : \text{لأن}) u_n = \frac{1+2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n} : \text{و بالتالي } u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n} \text{ و منه :}$$

ه - حساب u_{10} :

$$u_{10} = \frac{2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} + 1}{1 - \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1 + \frac{2}{2^9 \times 5}}{1 - \frac{1}{2^9 \times 5}} = \frac{2 + 2^9 \times 5}{2^9 \times 5 - 1} = \frac{2562}{2559} \approx 1,0011 \quad \text{لدينا :}$$

المهدي قصير

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

04. التمرين 4:-

1. طبيعة المتتاليات u_n محددا عناصرها المميزة .لدينا : $u_1 = 3$ و $u_2 = 7$ و $u_3 = 11$ و $u_4 = 15$ ومنه : نستنتج بأن المتتالية u_n حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول هو $u_1 = 3$.

2. عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء الهرم المتكون من 100 طابق :

بما أن : u_n حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول هو $u_1 = 3$.
إذن :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n \\
 &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times (n - 1 + 1) \\
 &= \frac{3 + (3 + (n - 1) \times 4)}{2} (n + 1) ; [u_n = u_1 + (n - 1) \times r] \\
 &= 3 + 2 \times (n - 1)
 \end{aligned}$$

ومنه : عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو :

$$S_{100} = \frac{3 + (3 + 4 \times (100 - 1))}{2} \times (100 - 1 + 1) = 201 \times 100 = 20100 \quad (\text{مع } n = 100).$$

خلاصة : عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو : 20100 عود من عود الثقاب.

تصحيح السلسلة رقم 7 الدورة الاولى
من طرف التلميذ المهدي قصير

Le : 26/01/2015 23:02:38