

المهدى قصیر

الموارد
اللائحة
المنهاج



تصحيح السلسلة رقم 7

من طرف التلميذ :



التاريخ: 26-01-2015 23:03

صفحة

التمرین الاول

01

أ. حسب u_0 و u_1 و v_0 و v_1 .

$$\text{لدينا : } u_1 = \frac{1}{4}(2^1 + 4 \times 1 - 5) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{4}(2^0 + 4 \times 0 - 5) = -1$$

$$v_1 = \frac{1}{4}(2^1 - 4 \times 1 + 5) = \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad v_0 = \frac{1}{4}(2^0 - 4 \times 0 + 5) = \frac{3}{2}$$

ب. أ. نبين أن المتالية a_n هندسية و أساسها 2 :

لدينا :

$$a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}(2^{n+1} + 4(n+1) - 5) + \frac{1}{4}(2^n - 4(n+1) + 5)$$

$$= \frac{1}{4}2 \times 2^{n+1}$$

$$= 2^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

خلاصة : المتالية a_n هندسية و أساسها 2 :

ب- حسب المجموع $S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

بما أن a_n هندسية و أساسها 2

لدينا :

$$S_1 = a_0 \times \frac{1 - 2^{n-0+1}}{1 - 2}$$

$$= (u_0 + v_0) \times (-1 + 2^{n-0+1})$$

$$= \frac{1}{2} \times (-1 + 2^{n+1})$$

$$= 2^n - \frac{1}{2}$$

أ - نبين أن المتالية b_n حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

$$b_{n+1} - b_n = (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{4}(8n - 2 - 8n + 16) = 2$$

خلاصة : b_n متالية حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

المهدى قصیر

الدعايات العددية
من طرف التلميذ :



تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

$$S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

لدينا :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n \\ &= \frac{b_0 + b_n}{2} \times (n - 0 + 1) \\ &= \left(-\frac{5}{2} + 2n - \frac{5}{2} \right) \frac{n+1}{2} \\ &= \left(n - \frac{5}{2} \right) (n+1) \end{aligned}$$

$$S_4 = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{و} \quad S_3 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad 4.$$

$$u_n = \frac{a_n + b_n}{2} : \text{لدينا} \quad a_n + b_n = 2u_n \quad \text{و منه} :$$

إذن :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{a_0 + b_0}{2} + \frac{a_1 + b_1}{2} + \dots + \frac{a_n + b_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \frac{1}{2} \times (S_1 + S_2) \\ &= 2^{n-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(n - \frac{5}{2} \right) (n+1) \\ &= 2^{n-1} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n - \frac{3}{2} \\ &\cdot u_n = \frac{a_n - b_n}{2} : \text{لدينا} \quad a_n - b_n = 2v_n \quad \text{و منه} : \end{aligned}$$

$$S_4 = \frac{a_0 - b_0}{2} + \frac{a_1 - b_1}{2} + \dots + \frac{a_n - b_n}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \frac{1}{2} \times (S_1 - S_2) \end{aligned}$$

$$= 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(n - \frac{5}{2} \right) (n+1) = 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{4} n + 1$$

$$S_4 = 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{4} n + 1 \quad \text{و} \quad S_3 = 2^{n-1} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n - \frac{3}{2} \quad \text{خلاصة :}$$

المهدى قصیر

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :



تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 26-01-2015 23:03

صفحة

التمرین الثانی :-

02

1. أحسب u_1 و u_2 .

$$\cdot \quad u_2 = \frac{2u_1}{3 + \sqrt{u_1}} = \frac{1}{3 + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{6 - \sqrt{2}}{17} \quad \text{و } u_1 = \frac{2u_0}{3 + \sqrt{u_0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} : \text{ لدينا}$$

2. نبين أن : $\forall n \geq 0 ; u_n > 0$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 1 > 0$ ومنه العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n > 0$.

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2u_n > 0 \\ 3 + \sqrt{u_n} > 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

ومنه العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 ; u_n > 0$

3. نبين أن : u_n تناظرية :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} - u_n \quad \text{لدينا :}$$

$$(u_n > 0) \quad = -\frac{u_n(1 + \sqrt{u_n})}{3 + \sqrt{u_n}} < 0$$

ومنه : $u_{n+1} < u_n$

خلاصة : u_n تناظرية.

4. أ - نبين أن : $u_{n+1} < \frac{2}{3}u_n$

لدينا :

المهدى قصیر

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



صفحة

التاريخ: 23:03 2015-01-26

$$3 + \sqrt{u_n} > 3 \Rightarrow \frac{1}{3 + \sqrt{u_n}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} \leq \frac{2u_n}{3}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{3}$$

خلاصة : $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

ب - نستنتج أن $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا : $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

من أجل $n=0$ نحصل على $u_1 \leq \frac{2}{3}u_0$

من أجل $n=1$ نحصل على $u_2 \leq \frac{2}{3}u_1$

من أجل $n=2$ نحصل على $u_3 \leq \frac{2}{3}u_2$

.....

من أجل $n-2$ نحصل على $u_{n-1} \leq \frac{2}{3}u_{n-2}$

من أجل $n-1$ نحصل على $u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

المتفاوتات حدودها موجبة جذأوها طرف بطرف نحصل بعد الاختزال على :

(و نعلم أن : $u_0 = 1$) $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times u_0$

$0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و لدينا $u_n > 0$ حسب ما سبق ومنه : إذن :

خلاصة : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

المهدى قصیر

الموئليات العددية
من طرف التلميذ :

7

تصحيح السلسلة رقم



التاريخ: 26-01-2015 23:03

صفحة

التمرین 3

03

أ. أحسب u_1 و u_2 .

$$\text{لدينا: } u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{4}{3} \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

خلاصة: $u_2 = \frac{4}{3}$ و $u_1 = \frac{1}{2}$

ب. نبين أن: $\forall n \geq 0 ; 0 \leq u_n \leq 3$

نستدل على ذلك بالترجع:
نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

لدينا: $u_0 = 3$ و منه $0 \leq u_0 \leq 3$ ومنه العلاقة صحيحة ل $n=0$.

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0 \leq u_n \leq 3$.

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.
لدينا:

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq u_n + 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_n} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

ومنه العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة: $\forall n \geq 0 ; 0 \leq u_n \leq 3$

أ. أحسب v_0 و v_1 .

$$\text{لدينا: } v_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\frac{1}{5} \quad \text{و} \quad v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$$

ب. نبين أن المتالية v_n هندسية وأساسها $q = -\frac{1}{2}$

لدينا:

المهدى قصیر

المتتاليات العددية
من طرف التلميذ :



تصحيح السلسلة رقم



صفحة

التاريخ: 23:03 2015-01-26

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n} - 1}{\frac{1+u_n}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n} - 1}{\frac{4+2u_n}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n} - 1}{\frac{4+2u_n}{1+u_n} + 2} = -\frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{4 + 2u_n} = -\frac{1}{2} \times v_n$$

إذن : $v_{n+1} = -\frac{1}{2} \times v_n$

خلاصة : المتتالية a_n هندسية و أساسها $q = -\frac{1}{2}$

ج - كتابة u_n و v_n بدلالة n .
• نكتب u_n بدلالة n .

بما أن a_n هندسية و أساسها 2 : $q = -\frac{1}{2}$

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} ; (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n : \text{ لدينا}$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n : \text{ خلاصة}$$

• نكتب u_n بدلالة n .

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$$

$$(v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n : \text{ لأن } u_n = \frac{1 + 2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \text{ و منه : } u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} \text{ وبالتالي :}$$

• حساب u_{10}

$$u_{10} = \frac{2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} + 1}{1 - \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1 + \frac{2}{2^9 \times 5}}{1 - \frac{1}{2^9 \times 5}} = \frac{2 + 2^9 \times 5}{2^9 \times 5 - 1} = \frac{2562}{2559} \approx 1,0011 \text{ لدينا :}$$

المهدى قصیر

الموارد التعليمية
من طرف التلميذ :



تصحيح السلسلة رقم 7



التاريخ: 26-01-2015 23:03

صفحة

التمرین 4

طبيعة المتتاليات u_n محددا عناصرها المميزة .

لدينا : $u_1 = 3$ و $u_2 = 7$ و $u_3 = 11$ و $u_4 = 15$

ومنه : نستنتج بأن المتتالية u_n حسابية أساسها 4 و حدتها الأول هو 3 .

عدد عود الثقب الضرورية لإنشاء الهرم المتكون من 100 طابق :

بما أن : u_n حسابية أساسها 4 و حدتها الأول هو 3 .

إذن :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n S_2 \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times (n - 1 + 1) \\ &= \frac{3 + (3 + (n - 1) \times 4)}{2} (n + 1) ; [u_n = u_1 + (n - 1) \times r] \\ &= 3 + 2 \times (n - 1) \end{aligned}$$

ومنه : عدد عود الثقب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو :

$$S_{100} = \frac{3 + (3 + 4 \times (100 - 1))}{2} \times (100 - 1 + 1) = 201 \times 100 = 20100 \quad (\text{مع } n = 100)$$

خلاصة : عدد عود الثقب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو : 20100 عود من عود الثقب.

تصحيح السلسلة رقم 7 الدورة الأولى
من طرف الطالب المهدى قصیر

Le : 26/01/2015 23:02:38