

التمرين الخامس

$$\begin{cases} U_0 = \frac{31}{5} \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 5U_n + 10}{3(U_n - 1)} \end{cases}$$

(1) أثبت أن $U_n \geq 5$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية

(3) بين أن $U_{n+1} - 5 \leq \frac{1}{10}(U_n - 5)$ لكل n من \mathbb{N}

و استنتج أن $U_n - 5 \leq \frac{6}{5} \left(\frac{1}{10} \right)^n$ لكل n من \mathbb{N}

(4) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

التمرين السادس

$(U_n)_n$; $(V_n)_n$ متتاليتان معرفتان بما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}$$

ونضع $T_n = 3U_n + 8V_n$; $W_n = V_n - U_n$

(1) بين $(W_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب W_n بدلالة n

(2) بين أن $(T_n)_n$ ثابتة محددًا قيمتها

(3) استنتج مما سبق U_n ; V_n بدلالة n

التمرين السابع

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 1 ; U_1 = 5 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} - 4U_n \end{cases} \text{ ونضع } x_n = U_{n+1} - kU_n$$

(1) حدد k بحيث تكون $(x_n)_n$ متتالية هندسية و حدد أساسها

(2) نفترض أن $k = 2$

أ- بين أن $U_{n+1} = 2U_n + (3 \times 2^n)$

ب- نضع $W_n = 2^n U_n$ بين أن $(W_n)_n$ متتالية حسابية

ج- حدد U_n بدلالة n

التمرين الثامن

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية بحيث

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{n^2 + n}{3} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

أحسب U_0 ; U_1 بين أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية و حدد U_n بدلالة n

لكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r \neq 0$ و $U_0 = 2$

و بحيث U_1 ; U_3 ; U_{13} حدود متتابعة لمتتالية هندسية

بين أن $r = -4$ و أحسب الجمع $U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{3^n U_n + 3}$

و نضع $V_n = \frac{1}{3^n U_n}$ لكل n من \mathbb{N}

أحسب U_1 و V_1 ; V_0

بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية ثم أحسب V_n بدلالة n

استنتج أن $U_n = \frac{1}{3^{n-1}(n+3)}$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $U_0 = 1$ و $3U_{n+1} = 2U_n + n + 3$

و لتكن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية بحيث: $V_n = U_n - n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

i. بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددًا أساسها وحدها الأول

ii. استنتج أن $U_n = \left(\frac{2}{3} \right)^n + n$

iii. بين أن $U_0 + U_1 + \dots + U_{99} = 4953 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{100}$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n - 4n - 1) \end{cases}$

و نضع $V_n = U_n + n - 1$ لكل n من \mathbb{N}

(1) أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

ب- أحسب U_n و V_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(2) نضع $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

و $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

بين أن $T_n = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n} \right)$ و أن $S_n = T_n - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$

التمرين الرابع

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية بحيث: $\begin{cases} 25U_{n+2} = 10U_{n+1} - U_n \\ U_0 = 0 ; U_1 = 1 \end{cases}$

و نضع $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{5}U_n$ و $W_n = 5^n U_n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و $(W_n)_n$ متتالية حسابية

(2) حدد الحد العام U_n بدلالة n

(3) أ- بين أن $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{5}U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- استنتج أن $0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)