

التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \text{ و } U_0 = -\frac{3}{4}$$

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 < U_n < -\frac{1}{2}$

2- نضع $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$

أ- بين أن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أحسب V_n بدلالة n واستنتج U_n بدلالة n

ب- أحسب بدلالة n كل من $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ و $P_n = V_0 V_1 \dots V_n$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = \frac{6U_n - 2}{2U_n + 1} \text{ و } U_0 = 1$$

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{2} < U_n < 2$

2- أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3- نضع $V_n = \frac{2U_n - 1}{U_n - 2}$

أ- بين أن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

ب- بين أن $U_n = \frac{2^n + (2 \times 5^n)}{2^{n+1} + 5^n}$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1- أدرس رقابة الدالة f على المجال $I = [1, 2]$

ب- استنتج أن $f(I) \subset I$

2- لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية وبحيث :

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ و } U_0 = 1$$

أ- أحسب U_1 وبين أن $1 \leq U_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية

ج- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2} |U_n - \sqrt{3}|$

د- بين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_n - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \text{ ونضع } I = [0, 1]$$

1- بين أن $f(I) \subset I$

2- بين أن $(\forall x \in I) : f(x) \geq x$

(II) لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث :

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ و } U_0 = \frac{1}{2}$$

1- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 1$

2- بين أن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية

3- أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{5} |U_n - 1|$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_n - 1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

التمرين الخامس

$(U_n)_n$; $(V_n)_n$ متتاليتان معرفتان بما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 5V_n}{6} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 5V_n}{8} \end{cases}$$

1- أحسب U_1 ; V_1

2- نضع $W_n = V_n - U_n$

أ- بين أن $(W_n)_n$ متتالية هندسية

ب- أحسب الجمع $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_{n-1}$

3- أ- تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n - U_{n-1} = \frac{5}{8} W_{n-1}$

ب- استنتج أن $U_n = U_0 + \frac{5}{8} S_n$

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \left| U_n - \frac{34}{19} \right| \leq \left(\frac{5}{24} \right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

التمرين السادس

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 + U_n} \right)^2 - 1 \text{ و } U_0 = 0$$

1- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n < 3$

2- أ- بين أن $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4} \left[\left(\sqrt{1 + U_n} - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{16}{9} \right]$

ب- أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3- نضع $V_n = \sqrt{1 + U_n} - 2$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها

ب- أحسب U_n بدلالة n

ج- أحسب الجمع $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + U_k}$