المتتاليات

القدرات المنتظرة

. توظيف الاستدلال بالترجع؛
. التمكن من دراسة متتالية (إكبار، إصغار، رتابة)؛
. التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛
. حساب مجموع n حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية.
. التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية؛
. استعمال المتتاليات الحسابية والهندسية في حل مسائل.

I- عموميات حول المتتاليات

1- تعاريف و مصطلحات

a/ أنشطة

1/ لاحظ ثم أتمم خمسة أعداد ملائمة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية:

a- 1، 3، 5، 7، 9، 11،......

b- 1، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ، ......

c- -3 ، $-\frac{3}{2}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{8}$ ، $-\frac{3}{16}$ ، $-\frac{3}{32}$ ، .....

d- $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{6}{7}$ ،.....

e- -2 ، 3 ، 1 ، 4 ، 5، 9 ، ......

- كل لائحة من اللوائح تسمى متتالية و الاعداد المكونة لكل لائحة تسمى حدود المتتالية
- نلاحظ أن لوائح أعلاه تسير بانتظام معين

اللائحة a هي الاعداد الفردية في ترتيب تصاعدي

اللائحة b هي أعداد على شكل $\frac{1}{n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة c هي أعداد على شكل $\frac{-3}{2^n}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي

اللائحة d هي أعداد على شكل $\frac{n}{n+1}$ بتعويض n بعدد صحيح طبيعي غير منعدم

اللائحة e هي أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد ين اللذين قبله وهكذا..........

2/ في كل لائحة من اللوائح a و b و c اذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ u_0 و الثاني بـ u_1 و الثالث بـ u_2 و هكذا دواليك فاننا نحصل على اللائحة u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ،........

أ/ ما رتبة u_8 ب/ حدد قيمة u_8

ج/ ما رتبة u_n ، حدد u_n

- u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ،......... تسمى حدود متتالية
- اذا كان الحد الاول هو u_0 فان رتبة u_0 هي 1 و رتبة u_1 هي 2 و هكذا....... رتبة u_n هي $n+1$

ج- a/ $u_n = 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ b/ $u_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ c/ $u_n = \frac{-3}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

u_n يسمى الحد العام للمتتالية

3/ في اللائحة d إذا رمزنا لأول عدد من اللائحة بـ v_1 و الثاني بـ v_2 و الثالث بـ v_3 و هكذا دواليك فإننا نحصل على اللائحة v_1 ، v_2 ، v_3 ،........

ما رتبة v_n ، حدد v_n

رتبة v_n هي n و $v_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4/ حد صيغة التي تسير عليها اللائحة e

لاحظنا أن في اللائحة e أعداد حصلنا فيها على الحد الثالث بمجموع الحدين اللذين قبله و الحد الرابع بمجموع الحد باللذين قبلهما وهكذا.........

اذا اعتبرنا أن w_1 ، w_2 ، w_3 ،........ حدود متتالية الائحة e فان $w_3 = w_1 + w_2$ و $w_4 = w_2 + w_3$ ...

$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ملاحظة:

المتتاليات في a و b و c و d أعطينا حدها العام بصيغة صريحة أي لحساب أي حد نعوض n و نحصل على النتيجة أم في e أعطينا حدها العام بدلالة حدود للمتتالية أي لحساب حد يجيب أن نرجع إلى حدين قبلهما

b/ تعريف

ليكن n_0 عددا صحيحا طبيعيا و $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ جزء من $\mathbb{N}$

كل دالة من I نحو $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية

اصطلاحات

*- $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \in I}$ عوض u.

*- اذا كان $I = \mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 0}$ أو (u_n)

*- اذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 1}$

*- اذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = (-2)^n + 3n \quad \text{و} \quad v_n = 2n^2 - 3n \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_{n+1} = 2w_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات (u_n) و $(v_n)_{n \geq 2}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$

2- تحديد متتالية

تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.

و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

أ- المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = 2n - 6 \quad \text{و} \quad v_n = a \text{ حيث } a \text{ عدد حقيقي} \quad \text{و} \quad w_n = \frac{(-2)^n}{n+1}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات محددة بالصيغة الصريحة

أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$

ب – المتتالية الترجعية: أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1 + u_{n-1}} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \quad v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n \geq 1}$ متتاليات ترجعية

1/ أحسب u_1 ; u_2 ; u_3 ; v_2 ; v_3 ; w_2 ; w_0

2/ بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

II- المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتبة

1-المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة

أنشطة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) حيث $u_n = \dfrac{2}{3}n - 1$ و $v_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

1/ أحسب u_0 و u_1 و v_0 و v_1

2/ بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$

....

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3$ نقول إن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 1$ نقول إن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 1

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n = 2n - 1$ و $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 2 \end{cases}$ و $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

بين أن (u_n) مصغورة و $(v_n)_{n\geq 1}$ مكبورة بالعدد3 و $(w_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

2- المتتالية الرتبة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \geq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \succ u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \leq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \prec u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I لدينا $u_n = u_m$

أمثلة

أدرس رتابة المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n = 2n - 1$ و $v_n = -3n + 5$

نشاط

برهن أن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

خاصيات

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1} \succ u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1} \prec u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1} = u_n$

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ :

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2^n}{n} \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 1 \end{cases}$$

1- أدرس رتابة (u_n) و $(v_n)_{n\geq1}$

2- أ- بين أن $w_n \prec 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- بين أن $(w_n)_{n\geq1}$ تزايدية .

III- المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

A- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $u_{n+1} = u_n + r \quad \forall n\geq n_0$

العدد r يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n\geq1}$ حيث $u_n = -2n+1$ و $v_n = \frac{1}{n}$

بين أن (u_n) متتالية حسابية محددا أساسها.

هل $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية؟

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

نشاط

$(u_n)_{n\geq p}$ حسابية أساسها r و حدها الأول u_p

1/ بين بالترجج أن $\forall n\geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$

2/ نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + ...u_{n-1}$

أ- بين بالترجج أن $1+2+3...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ب- ما عدد حدود المجموع S_n

ت- بين أن $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_p + (n-p)r \quad \forall n\geq p$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_0 + nr \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_1 + (n-1)r \quad \forall n\geq1$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n = u_q + (n-q)r \quad \forall n\geq q\geq p$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$ فان $S_n = \dfrac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

تمرين

لتكن (u_n) متتالية حسابية اساسها3 و حدها الأول $u_0 = -2$

1 / أحسب u_n بدلالة n و أحسب u_{200}

2/ أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

تمرين

لتكن (u_n) متتالية حسابية حيث $u_{50} = 20$ و $u_{30} = -40$

1/ حدد أساس ثم الحد العام للمتتالية (u_n)

2/ أحسب المجموع $S = u_{15} + u_{16} + \ldots + u_{54}$

تمرين

أحسب $S_n = 1+3+5+\ldots.+(2n+1)$

تمرين

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب u_n بدلالة n. ثم أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

B- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

(u_n) متتالية حيث $u_n = 3(2)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها

تمرين

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$ و $u_1 = 1$ و $v_n = u_n - 2$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها

2- صيغة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

نشاط

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q

1/ بين بالترجع أن $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

2/ نعتبر $q \neq 1$ و $S_n = u_p + u_{p+1} \dots\dots\dots\dots + u_{n-1}$

أ- بين أن $S_n - qS_n = u_p - u_n$

ب- استنتج أن $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_0 q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_1 q^{n-1} \quad \forall n \geq 1$
- اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_p q^{n-p} \quad \forall n \geq p \geq n_0$

أمثلة

* لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

* لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} \dots\dots\dots\dots + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 \dots\dots\dots\dots + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 \dots\dots\dots\dots + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} \dots\dots\dots\dots + u_{n-1} = u_p(n-p)$

تمرين

1/ لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

2/ لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

تمرين

أحسب بدلالة n المجموع $S = 2+4+8+16........+2^n$

تمرين

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$ لكل $n \in \mathbb{N}$

نضع $v_n = u_n + 6$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول v_0
2. احسب v_n ثم u_n بدلالة n
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

   احسب S_n بدلالة n