



.i. عموميات حول المتاليات العددية :
نشاط : .01

قدما أراد إمبراطور بلاد الهند مكافحة الحكيم الذي اختراع اللعبة الشطرنج وهي قطعة مربعة قسمت على 64 قطعة مربعة متساوي. قال الحكيم للإمبراطور "مكافحة هي أن تطع في المربع الموالي لكل مربع ضعف حبات من القمح التي كانت في المربع السابق مع العلم أن المربع الأول نضع حبة واحدة فقط.

قال الإمبراطور " طلب بسيط "

قال الحكيم " طبلي بسيط مثل بساطة هذه اللعبة "

التساؤل المطروح: هل طلب الحكيم بسيط؟ هذا الفصل سيعطي الجواب ترييض هذه الوضعية :

المربع الأول نربطه بعدد حبات القمح (أي $1 \rightarrow 1$) . المربع الثاني نربطه بعدد حبات القمح (أي $2 \times 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2$) . المربع الثالث نربطه بعدد حبات القمح (أي $2^2 \times 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3$) . المربع الرابع نربطه بعدد حبات القمح (أي $2^3 \times 2^2 \rightarrow 4 \rightarrow 4$) نحصل على التطبيق الآتي: (أتم التطبيق التالي)

$$f : I = \{1; 2; 3; \dots; ?\} \rightarrow \mathbb{R} \quad i \rightarrow \dots ?$$

.02. مفردات :

- التطبيق السابق يسمى متالية عددية من I (ضمن \mathbb{N}) إلى \mathbb{R} .
- نرمز للمتالية ب: u أو v أو w ...
- نرمز ل $f(x)$ ب $u(n)$ أو باختصار u_n .
- العدد n يسمى المدل .
- u_n يسمى الحد العام للمتالية u أو u_n .
- العدد $1 = 2^0 = u_1$ يسمى الحد الأول للمتالية u_n و نرمز له بصفة عامة u_{n_0}
- التطبيق f نرمز له ب: u_n أو $u_{n \in \{1; 2; \dots; 64\}}$ أو $u_{n \in I}$

.03. تعريف :

I ضمن \mathbb{N} . كل تطبيق u من I إلى \mathbb{R} يسمى متالية عددية ونرمز له ب: u_n

u_{n_0} يسمى الحد العام للمتالية و u_1 يسمى الحد الأول للمتالية. (n_0 هو أصغر عدد من I)

.04. أمثلة :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n ; n \geq 0 \\ u_0 = 3 ; u_1 = 4 \end{cases} \quad u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n} ; n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{n-1} ; n \geq 2 \quad (w_n = 2n)_{n \geq 0}$$

المتالية الأخيرة: لحساب u_{i+2} يجب حساب u_{i+1} و u_i لهذا نقول u_n متالية معرفة بعلاقة ترجعية أو u_n متالية ترجعية من الدرجة 2 أحسب u_2 و u_3 .

.05. تمارين :

$$\text{نعتبر المتالية } (v_n)_{n \geq 1} \text{ مع}$$

(1) أحسب v_2 ; v_3 ; v_4 ; v_5 .

(2) بين أن: $v_n = n$. $\forall n \in \mathbb{N}$;

.ii. متالية مكبورة - مصغررة - محدودة :

.01. نشاط :

$$\text{نعتبر المتالية العددية: } (u_n)_{n > 1} \quad (u_n = \frac{1}{n})_{n > 1}$$

(3) بين أن: $u_n > 1$. $\forall n > 1$. $u_n > 0$. ماذا نستنتج؟



تعريف : 02

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متالية عددية. M عددين من \mathbb{R} .

($\forall n \geq n_0; u_n < M$ يكفي $(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة ب M) أو ($\forall n \geq n_0; u_n \leq M$ يكفي $(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة ب M)

($\forall n \geq n_0; m < u_n; m \leq u_n$ يكفي $(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة ب m) أو ($\forall n \geq n_0; m \leq u_n$ يكفي $(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة ب m)

محدودة يكفي إن u_n مكبورة ومحدودة.

مثال : 03

نعتبر المتالية العددية: $w_n = \frac{n+3}{n+4}$. بين أن: w_n مكبورة ثم مصغرورة على \mathbb{N} .

iii. رتابة متالية :

نشاط : 01

متالية عددية $(u_n)_{n \geq n_0}$ و n' أكبر من أو يساوي n_0 . أكتب علاقة حيث تكون u_n متالية تزايدية.

تعريف : 02

$(u_n)_{n \in I}$ متالية عددية.

(1) u_n متالية تزايدية على I يكفي $u_m < u_n \leq u_m \forall n, m \in I; n < m$. (أما $u_m < u_n \leq u_m$ تزايدية قطعا على I)

(2) u_n متالية تناصصية على I يكفي $u_n > u_m \forall n, m \in I; n < m$. (أما $u_n > u_m \forall n, m \in I; n < m$ تناصصية قطعا على I)

(3) u_n متالية ثابتة على I يكفي $\forall n, m \in I; u_n = u_m$

خاصية : 03

$(u_n)_{n \in I}$ متالية عددية.

(1) u_n متالية تزايدية على I يكفي: $u_n \leq u_{n+1} \forall n \in I; u_n < u_{n+1}$. (أما $u_n < u_{n+1} \forall n \in I; u_n \leq u_{n+1}$ تزايدية قطعا على I)

(2) u_n متالية تناصصية على I يكفي: $u_n > u_{n+1} \forall n \in I; u_n \geq u_{n+1}$. (أما $u_n \geq u_{n+1} \forall n \in I; u_n > u_{n+1}$ تناصصية قطعا على I)

(3) u_n متالية ثابتة على I يكفي: $\forall n \in I; u_{n+1} = u_n$

مثال : 04

نأخذ $w_1 = 1$ و $w_n = 1 + w_{n-1}$. أدرس رتابة w_n .

iv. المتالية الحسابية :

نشاط : 01

نفترض أن جبل يبلغ علوه 1600 متر تأثر عليه التعرية حيث يفقد من علوه 2cm (سنتيمتر) كل سنة. وهذه المعطيات سجلت خلال سنة 2000 . أكتب هذه المعطيات على شكل متالية . (أي ترتيب المعطيات) ما هي السنة التي يصبح علو الجبل 1599 متر؟

نأخذ المتالية $(v_n)_{n \geq 2000}$ حيث $v_1 = 160000$ و $v_n = v_{n-1} - 2$.

02. مفردات: v_n تسمى متالية حسابية أساسها 2

تعريف : 03

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متالية عددية . r عدد حقيقي غير منعدم .

نقول إن u_n متالية حسابية أساسها r وحدتها الأول u_{n_0} يعني إن $u_{n_0} = u_{n_0+1} - u_{n_0} = r$.



مثلاً: نعتبر المتالية العددية الآتية: $u_n = 2n + 3; n \geq 0$. بين أن u_n متالية حسابية وحدد عناصرها المميزة.

مفردات: $u_n = 2n + 3$ الحد العام للمتالية الحسابية

v. صيغة الحد العام لمتالية حسابية:

01. خاصية:

$$\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r \text{ وحدها الأول } u_{n_0} \text{. لدينا: } (u_n)_{n \geq n_0}$$

برهان: **02**

بين على صحة الخاصية السابقة. (الاستدلال بالترجع)

ملاحظة: لدينا: $u_q = u_{n_0} + (q - n_0)r$; $(n = q)$ و $u_p = u_{n_0} + (p - n_0)r$; $(n = p)$. ومنه:

$$u_q = u_{n_0} + (q - n_0)r = u_{n_0} + (q - p + p - n_0)r = u_{n_0} + \underbrace{(p - n_0)r}_{u_p} + (q - p)r = u_p + (q - p)r$$

03. خاصية:

$$\forall p, q \geq n_0 : u_q = u_p + (q - p)r \text{ لدينا: } (u_n)_{n \geq n_0}$$

أمثلة: **04**

مثلاً 1: u_n متالية حسابية أساسها $3 = r$ وحدها $10 = u_7$. أحسب u_{2007} .

مثلاً 2: متالية حسابية أساسها r وحدها $5 = u_0$ و $-45 = u_{100}$. حدد r و u_n بدلالة n .

vi. المجموع لحدود متتابعة لمتالية حسابية:

01. خاصية:

$$(u_n)_{n \geq n_0} \text{ متالية عددية حسابية أساسها } r \text{ وحدها الأول } u_{n_0} \text{. لدينا: } n_0 \leq p \leq n .$$

$$S_n = \sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$$

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{ عدد الحدود })$$

02. ملاحظة:

هناك $n + 1$ من الحدود $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

هناك n من الحدود $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

هناك $n - 1$ من الحدود $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$

vii. متالية هندسية:

01. نشاط: نأخذ النشاط المتعلق بقصبة الشطرنج. لدينا: $(u_n = 2^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$. أوجد علاقة بين u_n و u_{n+1} .

02. مفردات: u_n تسمى متالية هندسية أساسها $2 = q$ وحدها الأول $1 = 2^0$.

03. تعريف:

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متالية عددية. q عدد حقيقي غير منعدم.

نقول إن u_n متالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_{n_0} يعني أن $u_{n+1} = q \times u_n$



viii. صيغة الحد العام لمتالية هندسية :

01. مثال: تعتبر المتالية العددية الآتية : $u_n = 2 \times 5^n$; $n \geq 0$. بين أن u_n متالية هندسية وحدد عناصرها المميزة .

02. مفردات: $u_n = 2 \times 5^n$; $n \geq 0$ الحد العام للمتالية الهندسية .

03. خاصية :

$$\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)} \text{ متالية عددية هندسية أساسها } q \text{ وحدها الأول } u_{n_0}. \text{ لدينا :}$$

برهان: بين على صحة الخاصية السابقة . (الاستدلال بالترجع) . 04

05. خاصية :

$$\forall p, q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p} \text{ متالية عددية هندسية أساسها } q. \text{ لدينا :}$$

برهان: 06

$$u_q = u_{n_0} \times q^{q-n_0} \Leftrightarrow u_q = u_{n_0} \times q^{q-p+p-n_0} \Leftrightarrow u_q = \underbrace{u_{n_0} \times q^{p-n_0}}_{u_p} \times q^{q-p} \Leftrightarrow u_q = u_p \times q^{q-p}$$

07. تمرين :

ix. المجموع لحدود متتابعة لمتالية هندسية :

01. خاصية :

. $n_0 \leq p \leq n$. u_{n_0} متالية عددية هندسية أساسها q وحدها الأول .

$$S = \sum_{i=p}^{n_0} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p \quad : q \neq 1 \quad (1)$$

$$S = \sum_{i=p}^{n_0} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p(n - p + 1) \quad : q = 1 \quad (2)$$

02. تمرين :

نأخذ قصة الحكيم والإمبراطور والشترنج : نفترض أن كيلو غرام من القمح يعطي 2000 حبة من القمح .

نفترض أن قاطرة لقطار نقل البضائع سعة حمولتها هي 20 طن من القمح .

(1) أوجد عدد حبات القمح التي طلبها الحكيم من الإمبراطور .

(2) أوجد عدد قاطرات القمح التي يجب على الإمبراطور توفيرها للحكيم .

(3) هل طلب الحكيم كان بسيط حسب الإمبراطور ؟

x. المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : لثلاثة حدود متتابعة .

01. المعدل الحسابي .

$u_i = a$ و $u_{i+1} = b$ و $u_{i+2} = c$ حodos متتابعة لمتالية حسابية أساسها r .

لدينا : $r = u_i - u_{i+1}$ و $u_i = u_{i+1} + r$ ومنه : $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$.

خلاصة : $a + b = 2c$ هذه العلاقة تسمى المعدل الحسابي .

02. المعدل الهندسي : إذا كانت u_n هندسية بالنفس الطريقة نحصل على: $a \times c = b^2$ هذه العلاقة تسمى المعدل الهندسي.