I. صيغ تحويل: $\tan(a\pm b)$; $\cos(a\pm b)$; $\sin(a\pm b)$

01. تحويل $\cos(a+b)$ ثم تحويل $\sin(a+b)$

▪ نشاط:

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م.م.م. مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$. الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم $\mathcal{C}(O,1)$. $(O,\vec{i},\vec{j})$. A و B و I نقط من $(\mathcal{P})$

حيث : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$. a و b أفصولين منحنيين ل A و B على التوالي. نذكر ما يلي:

قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ هو a : أي $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})\equiv a\ (2\pi)$ أو أيضا : $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}=a+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$.

قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ هو b : أي $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})\equiv b\ (2\pi)$ أو أيضا : $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}=b+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$.

1. حدد إحداثيتي كل من المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$.
2. أحسب: $\overline{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})}$ بدلالة a و b.
3. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ بطريقتين مختلفتين.
4. استنتج صيغة ل $\cos(a-b)$ و $\cos(a+b)$.
5. استنتج صيغة ل $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$.

▪ خاصية :

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا:

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ و $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ و $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

▪ نتائج :

- حالة خاصة : $a=b$ نحصل على: $\sin 2a=2\sin a\cos a$ و $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
من خلال: $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ نحصل على: $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ و $\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

▪ مثال 1 :

أحسب: $\cos\dfrac{\pi}{8}$

لدينا : $\cos 2a=2\cos^2 a-1$: نأخذ : $a=\dfrac{\pi}{8}$: ومنه : $\cos\dfrac{\pi}{4}=2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1$

و بالتالي نجد: $\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ أو $\cos\dfrac{\pi}{8}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ و نعلم أن : $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ إذن : $\cos\dfrac{\pi}{8}>0$

خلاصة: $\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

- **مثال 2:**

أوجد قيمة ل: $\cos\frac{7\pi}{12}$

لدينا: $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{3\pi+4\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

خلاصة: $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

02. تحويل: $\tan(a+b)$

- **نشاط :**

a و b من $\mathbb{R}$ حيث : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

1. أكتب $\tan(a+b)$ بدلالة : $\cos a\ ;\ \cos b\ ;\ \sin a$ و $\sin b$.
2. أوجد $\tan(a+b)$ بدلالة $\tan a$ و $\tan b$ (يمكن تعميل البسط و المقام ب $\frac{1}{\cos a\times\cos b}$).
3. استنتج : $\tan(a-b)$ و $\tan(2a)$.

- **خاصية:**

a و b من $\mathbb{R}$ حيث : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

- $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$ و $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$ و $\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

II. صيغ تحويل المجاميع إلى جداءات ـ الجداءات إلى مجاميع:

01. تحويل مجموع إلى جداء ثم جداء إلى مجموع:

- **نشاط:**

من خلال صيغ تحويل : $\cos(a\pm b)$ و $\sin(a\pm b)$.

1. بسط: $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ ؛ $\cos(a+b)-\cos(a-b)$ ؛ $\sin(a+b)+\sin(a-b)$ ؛ $\sin(a+b)-\sin(a-b)$
2.
   أ ـ استنتج قيم : $\cos a\times\cos b$ ؛ $\sin a\times\sin b$ ثم $\sin a\times\cos b$.
   ب ـ أعط صيغ تحويل جداء إلى مجموع المحصل عليها.
3.
   أ ـ نضع : $a+b=x$ و $a-b=y$ ، أكتب a و b بدلالة x و y .
   ب ـ استنتج صيغ ل: $\cos x+\cos y$ و $\cos x-\cos y$ و $\sin x+\sin y$ و $\sin x-\sin y$ بدلالة:
   $\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \cos\frac{x+y}{2}\ ;\ \sin\frac{x-y}{2}$ و $\sin\frac{x+y}{2}$.
   ج ـ أعط الصيغ المحصل عليها.

- خاصيات

a و b من $\mathbb{R}$. لدينا :

1) تحويل جداء إلى مجموع

$$\cos a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

2) تحويل مجموع إلى جداء

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

- مثال :

أوجد قيمة : $\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$

لدينا : $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

خلاصة : $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

III. صيغ تحويل مثلثية أخرى:

01. صيغة تحويل : $a\cos x+b\sin x$

- نشاط:

a و b من $\mathbb{R}^*$ نعتبر الكتابة الآتية : $A=a\cos x+b\sin x$. عمل A ب : $\sqrt{a^2+b^2}$.

1. أكتب A على شكل : $\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\alpha)$ أو $\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(x-\alpha)$ مع α من $\mathbb{R}$. (لاحظ $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$)

2. أعط الصيغتين المحصل عليهما.

- خاصية:

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$

- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\alpha)$ (مع $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$).
- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(x-\alpha)$ (مع $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

- مثال:

أوجد تحويل ل : $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$.

لدينا : $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

02. صيغ تحويل : $\tan x$; $\cos x$ و $\sin x$ بدلالة $t=\tan\frac{x}{2}$.

▪ نشاط:

نضع $x\neq\pi+2k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

أ - نذكر: $\sin 2a=2\sin a\cos a$ و $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.أكتب الصيغتين مع $2a=x$.

ب - نضع $t=\tan\frac{x}{2}$. أوجد $\sin x$; $\cos x$ و $\tan x$ بدلالة t . يمكن استعمال القسمة ب $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$.

نأخذ : $$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=2\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=2\frac{t}{1+t^2}$$

▪ خاصية:

نضع : $t=\tan\frac{x}{2}$ مع $x\neq\pi+2k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$. لدينا : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

▪ مثال:

أحسب: $\tan\frac{\pi}{8}$. لدينا $\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$ مع $t=\tan\frac{a}{2}$.

نأخذ $a=\frac{\pi}{4}$ و منه : $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2t}{1+t^2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0$.

و منه $\Delta'=1$ و بالتالي هناك حلين هما : $t_1=-1+\sqrt{2}$ و $t_2=1+\sqrt{2}$.

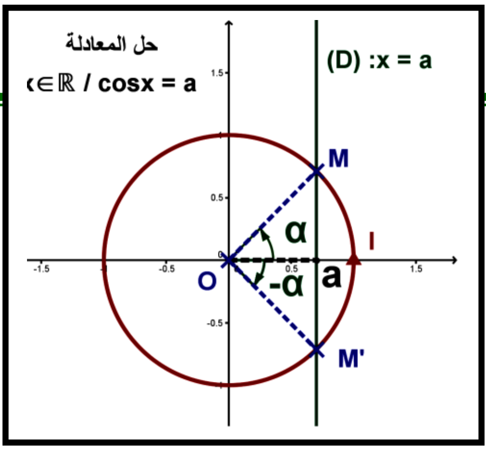
و نعلم أن $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}$ إذن $\tan 0<\tan\frac{\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{4}$ وبالتالي $0<\tan\frac{\pi}{8}<1$. و منه الحل المقبول هو : $t_1=-1+\sqrt{2}$.

خلاصة: $\tan\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}$

IV. المعادلات المثلثية:

01. حل المعادلة : $x\in\mathbb{R}/\cos x=a$ (تذكير)

▪ خاصية:



a عدد حقيقي معلوم . مجموعة حلول المعادلة : $x\in\mathbb{R}/\cos x=a$ هي:

- $a\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن : $S=\varnothing$ (المعادلة ليس لها حل)
- $a\in[-1,1]$ نبحث عن α حيث $a=\cos\alpha$

ومنه : $\cos x=a\Leftrightarrow\cos x=\cos\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2k\pi\\x=-\alpha+2k\pi\end{cases}$; $k\in\mathbb{Z}$

و بالتالي : $S=\{\alpha+2k\pi\ ,\ -\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

- **حالات خاصة :**

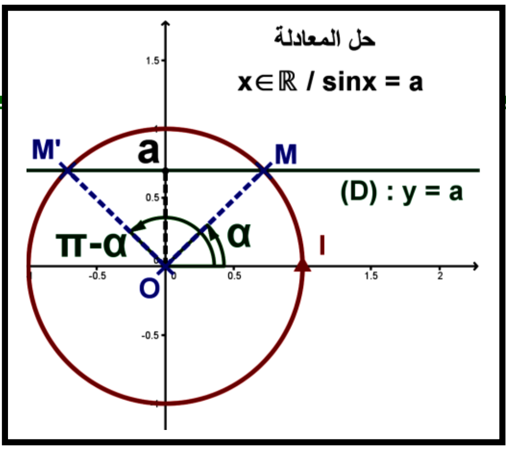
أ $a=1$ فإن : $S=\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$ ؛ ب $a=-1$ فإن: $S=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$ ؛ ج $a=0$: $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

- **مثال: حل المعادلة :** $(E): x\in\mathbb{R} / \cos x=\frac{1}{2}$

لدينا : $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} ; k\in\mathbb{Z}$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

.02 حل المعادلة : $x\in\mathbb{R} / \sin x=a$ (تذكير)



- **خاصية:**

a عدد حقيقي معلوم . مجموعة حلول المعادلة : $x\in\mathbb{R} / \sin x=a$ هي:

- $a\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن : $S=\varnothing$ (المعادلة ليس لها حل)
- $a\in[-1,1]$ نبحث عن α حيث $a=\sin\alpha$

ومنه : $\sin x=a\Leftrightarrow \sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases} ; k\in\mathbb{Z}$

و بالتالي : $S=\{\alpha+2k\pi\ ,\ \pi-\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

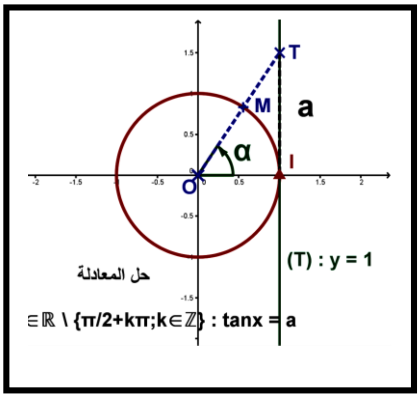
- حالات خاصة :

أ $a=1$ فإن : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ ؛ ب $a=-1$ فإن : $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ ؛ ج $a=0$: $S=\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

- **مثال: حل المعادلة :** $(E): x\in\mathbb{R} / \sin x=\frac{1}{2}$:

لدينا : $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases} ; k\in\mathbb{Z}$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$



.03 حل المعادلة : $\tan x=a : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ (تذكير)

- **خاصية:**

a عدد حقيقي معلوم . لحل المعادلة: $\tan x=a : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$: (E)

نبحث عن α حيث $a=\tan\alpha$ ومنه : $\tan x=a\Leftrightarrow \tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

- مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{\alpha+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

04. حل المعادلة على شكل : $x\in\mathbb{R} : a\cos x+b\cos x=c$

- **نشاط :**

1. أ - بين أنه يمكن كتابة المعادلة التالية: $(E) : x\in\mathbb{R} : \cos x+\sqrt{3}\cos x=1$. على شكل $(E) : x\in\mathbb{R} : \cos X=a$.

ب – حل المعادلة (E).

2. أ - بين أنه يمكن كتابة المعادلة التالية: $(E) : x\in\mathbb{R} : \cos x+\sqrt{3}\cos x=1$. على شكل $(E) : x\in\mathbb{R} : \sin X=a$.

ب – حل المعادلة (E).

- **خاصية:**

لحل المعادلة $(E) : x\in\mathbb{R} : a\cos x+b\cos x=c$ نتبع المراحل التالية:

- المرحلة 1 : نكتبها على شكل: $(E)\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right]=c$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right]=c$ ؛ (أو $\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x\right]=c$)

$\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ؛ (أو $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

- المرحلة 2 : بدلا من حل المعادلة: $(E) : x\in\mathbb{R} : a\cos x+b\cos x=c$ نحل المعادلة $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(أو $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

- ملحوظة: مجموعة حلول المعادلة مرتبطة بقيمة العدد $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (هل $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\in[-1,1]$ أو $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\notin[-1,1]$).

- **مثال:** حل المعادلة : $(E) : x\in\mathbb{R} : \cos 3x+\cos 3x=1$.

لدينا :

$$\cos 3x+\cos 3x=1\Leftrightarrow\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right]=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos 3x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 3x\right]=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}-3x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{4}-3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases};k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{6}-\frac{2k\pi}{3}\end{cases};k\in\mathbb{Z}$$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\left\{\frac{\pi}{6}-\frac{2k\pi}{3}\ ,\ -\frac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$.