

تحليلية الجداء السلمي و تطبيقاته

نعتبر في جميع الفقرات أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الصيغة التحليلية للجداء السلمي

إذا كانت $\vec{U}(x, y)$ و $\vec{V}(x', y')$ فإن $\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy'$

$$\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad \text{و} \quad \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

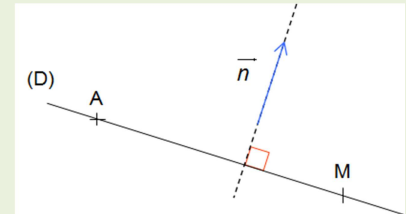
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| : \text{مساحة مثلث } ABC$$

المستقيم في المستوى

• كل مستقيم (D) معادلته الديكارتية تكتب على شكل $ax + by + c = 0$

المتجهة $\vec{u}(-b, a)$ متجهة موجهة ل (D)

المتجهة $\vec{n}(a, b)$ متجهة منظمية ل (D)



• ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_A, y_A)$ و $\vec{n}(a, b)$ متجهة موجهة ل (D)

لدينا $(D) = \{M \in (P) / \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0\}$

• الأوضاع النسبية لمستقيمين :

لتكن $\vec{n}(a, b)$ متجهة منظمية ل (D)

و لتكن $\vec{n}'(c, d)$ متجهة منظمية ل (Δ)

▪ إذا كانت $\det(\vec{n}, \vec{n}') \neq 0$ فإن (D) و (Δ) متقاطعان في نقطة وحيدة

▪ إذا كانت $\det(\vec{n}, \vec{n}') = 0$ فإن (D) و (Δ) متوازيين

مسافة نقطة عن مستقيم :

- ليكن $(D): ax + by + c = 0$ و $H(x_H, y_H)$
- لدينا : $d(H, (D)) = \frac{|ax_H + by_H + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

معادلة ديكارتية لدائرة

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a, b)$ و شعاعها r
 $(C) = \{M \in (P) / \Omega M = r\}$

أ. معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها:
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

ب. معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها $[AB]$

طريقة 1:

لدينا $\Omega(a, b)$ مركز (C) هو منتصف $[AB]$

أي : $a = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $b = \frac{y_A + y_B}{2}$

و شعاع الدائرة (C) هو $r = \frac{AB}{2}$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

طريقة 2:

لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$

$$(C) = \{M \in (P) / \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0\}$$

ج. معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بثلاث نقط

لتكن (C) دائرة تمر من النقط A و B و C

(C) هي دائرة مركزها $\Omega(a, b)$ هي نقطة تقاطع واسطين من المثلث ABC و شعاع (C) هو : $r = \Omega A = \Omega B = \Omega C$

د. تمثيل بارامترى لدائرة

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ و شعاعها r

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

تحديد داخل و خارج الدائرة :

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة من المستوى

- إذا كانت $\Omega A < r$ فإن A توجد داخل الدائرة
- إذا كانت $\Omega A = r$ فإن A تنتمي إلى الدائرة
- إذا كانت $\Omega A > r$ فإن A توجد خارج الدائرة

الأوضاع النسبية للدائرة و المستقيم فى المستوى

ليكن (D) المستقيم ذي المعادلة $ax + by + c = 0$ و لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ و شعاعها r

و لتكن d مسافة $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ عن المستقيم (D)

الحالة 1: إذا كان $d > r$ فإن (C) و المستقيم (D) لا يتقاطعان

الحالة 2: إذا كان $d = r$ فإن المستقيم (D) و الدائرة (C) يتقاطعان في نقطة وحيدة و نقول أن (D) مماس للدائرة (C)

الحالة 3: إذا كان $d < r$ فإن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين

معادلة المماس للدائرة (C) عند إحدى نقطتها

ليكن (D) المستقيم المماس للدائرة (C) في النقطة H

لدينا : $M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{H\Omega} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$

تحديد مجموعة النقط M و إشارة الطريقة :

مجموعة النقط M لتي تحقق	إشارة الطريقة
$MA^2 + MB^2 = k$	مبرهنة المتوسط : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
$MA^2 - MB^2 = k$	$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$ (I منتصف $[AB]$)

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (I منتصف [AB])	$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$
$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}) = 0$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ مع H مرجع (A,1) و (B,k) و G مرجع (A,1) و (B,-k)	$\frac{MA}{MB} = k$
$aMA^2 + bMB^2 = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2$ مع $a+b \neq 0$	$aMA^2 + bMB^2 = k$