تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I ـ الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

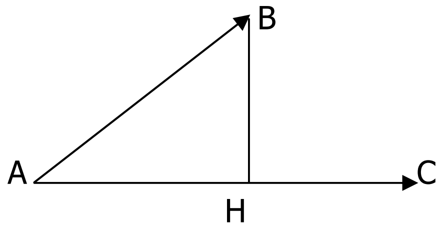
1) تذكير وإضافات :

أ ـ تعريف الجداء السلمي لمتجهتين :

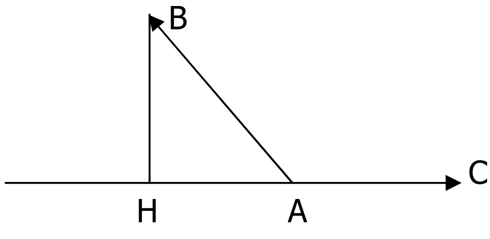
صيغة الجداء السلمي باستعمال الإسقاط العمودي :

لتكن A و B و C ثلاث نقط في المستوى و H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) .
الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ والذي يحقق :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH \times AC$ إذا كانت المتجهتين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى .
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AH \times AC$ إذا كانت المتجهتين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما المنحيان متعاكسان .



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH \times AB$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AH \times AB$

الصيغة المثلثية للجداء السلمي :

- لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين في المستوى لدينا : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في المستوى لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$.

ب ـ المعلم المتعامد الممنظم المباشر ـ الأساس المتعامد الممنظم المباشر :

تعاريف :

1. نقول إن متجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ تكونان أساسا في المستوى إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مستقيميتين . ونكتب $(\vec{i};\vec{j})$ أساس في المستوى . والمستوى مزود بأساس $(\vec{i};\vec{j})$.
نعتبر$(\vec{i};\vec{j})$ أساسا في المستوى و O نقطة من المستوى .
2. نقول إن $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان : $\vec{i}.\vec{j}=0$ و $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=1$.
3. نقول إن المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما .
4. إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم و $\overline{(\vec{i};\vec{j})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ فإننا نقول إن $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

ملاحظة : في كل هذا الدرس نعتبر المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر .

2) الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم :

نشاط تمهيدي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في المستوى بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$
1) انشر ثم بسط ما يلي : $(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j})$ واستنتج : $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2) بين أن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

خاصية 1 :

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين في المستوى فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.

أمثلة : نعتبر المتجهات : $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{w}=5\vec{i}+3\vec{j}$
حساب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{u}\cdot\vec{w}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

خاصية 2 :

تكون المتجهتان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان : $xx'+yy'=0$.

3) الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين :

أ ــ منظم متجهة :

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ متجهة في المستوى لدينا : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

ب ــ المسافة بين نقطتين :

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين في المستوى ، لدينا : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

4) صيغة $Cos\theta$ و $Sin\theta$:

نشاط تمهيدي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ و θ قياس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$

1) احسب بطريقتين مختلفتين الجداء السمي احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2) استنتج $\cos\theta$ بدلالة x و y و x' و y' .

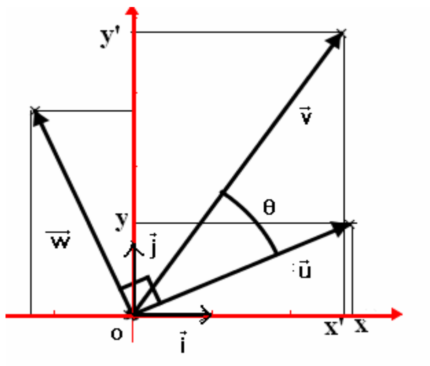
3) نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث : $\overline{(\vec{u};\vec{w})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$.

أ ــ بين أن : $\overline{(\vec{v};\vec{w})}\equiv\frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]$.

ب ــ احسب الجداء السلمي $\vec{v}\cdot\vec{w}$ ثم استنتج أن : $\sin\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

ج ــ تحقق أن $\vec{w}(-y;x)$ ثم احسب $\sin\theta$ بدلالة x و y و x' و y'

د ــ تحقق أن : $\sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$.



خاصية :

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين في المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$. لدينا : $Cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$ و $Sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

تمارين تطبيقية :

1) حدد قيمة العدد الحقيقي m بحيث تكون المتجهتان $\vec{u}(2;m)$ و $\vec{v}(3;-2)$ متعامدتين .

2) نعتبر المتجهة $\vec{u}(2;-3)$ حدد المتجهات $\vec{v}(x;y)$ بحيث يكون $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$ و $\|\vec{v}\|=2$.

3) نعتبر النقط $A(-3;-1)$ و $B(1;1)$ و $C(-5;3)$. بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A

4) نعتبر النقط $A(5;0)$ و $B(2;1)$ و $C(6;3)$.

أ ــ احسب $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

ب ــ استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

5) نتائج :

نشاط تمهيدي :

ليكن ABC مثلثا في المستوى و H المسقط العمودي ل C على (AB) .

1) حدد $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ واحسب $\sin\widehat{A}$ (حيث $\widehat{A}$ زاوية هندسية)

2) احسب المساحة S للمثلث ABC بدلالة AB و AC و $\sin\widehat{A}$.

3) استنتج أن : $S=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|$

4) نعتبر النقطة D بحيث يكون $ABDC$ متوازي أضلاع محدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

احسب مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$.

خاصية 1 :

ليكن ABC مثلثا في المستوى و S مساحته ، لدينا :
$S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\right|$.

خاصية 2 :

مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$ المحدد بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي : $S_{ABCD}=\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|$.

تمارين تطبيقة :

1) نعتبر النقط $A(5;0)$ و $B(2;1)$ و $C(6;3)$.
أ ــ تحقق أن النقط A و B و C غير مستقيمية .
ب ــ احسب مساحة المثلث ABC .
ج ـ نعتبر النقطة D بحيث يكون $ABDC$ متوازي أضلاع . حدد زوج إحداثيتي النقطة D ثم احسب مساحة متوازي الأضلاع $ABDC$.
2) نعتبر النقط $A(0;6)$ و $B(-2;0)$ و $C(2;1)$.
احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلتين .

II ــ المستقيم في المستوى (دراسة تحليلة) :

1) المتجهة المنظمة على مستقيم :

نشاط تمهدى :

1) نعتبر المستقيم (D) ذي المعادلة : $x+2y+1=0$.
أ ــ حدد متجهة موجهة $\vec{u}$ للمستقيم (D) .
ب ــ نعتبر المتجهة $\vec{n}(1;2)$ احسب الجداء السلمي $\vec{n}\cdot\vec{u}$. ماذا تستنتج ؟
المتجهة $\vec{n}$ تسمى متجهة منظمة على المستقيم (D) .
2) نعتبر المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $ax+by+c=0$.
أ ــ بين أن المتجهة $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة على المستقيم (Δ) .
ب ــ تطبيق : حدد متجهة منظمة على المستقيم (D) ذو المعادلة : $x-y+2=0$.

تعريف :

ليكن (D) مستقيما في المستوى و $\vec{u}$ متجهة موجهة له .
نقول إن متجهة غير منعدمة $\vec{n}$ منظمة على المستقيم (D) إذا كانت تحقق : $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.

خاصية :

ليكن (D) مستقيما في المستوى معادلته $ax+by+c=0$.
المتجهة $\vec{n}(a;b)$ منظمة على المستقيم (D)

2) المعادلة الديكارتية لمستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمة عليه :

نشاط تمهدى :

نعتبر $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .
حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة عليه .

خاصية

معادلة المستقيم (D) المار من $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمة عليه هي :
$a(x-x_A)+b(y-y_B)=0$

تمارين تطبيقية :

1) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(1;1)$ و $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية عليه .

2) ليكن ABC مثلثا في المستوى بحيث $A(3;1)$ و $B(-1;5)$ و $C(-2;2)$.

أ ــ حدد معادلة ديكارتية لارتفاع المثلث المار من الرأس C .

ب ــ حدد معادلة ديكارتية لواسط القطعة $[AB]$.

3) تعامد مستقيمين :

نعتبر مستقيمين (D) و (D') معادلتهما على التوالي : $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية على (D) و $\vec{n}'(a';b')$ متجهة منظمية على (D') .

يكون (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{n}(a;b)$ و $\vec{n}'(a';b')$ متعامدين أي : $aa'+bb'=0$

خاصية :

يكون المستقيمان (D) و (D') اللذان معادلتهما $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على التوالي متعامدين إذا وفقط إذا كان : $aa'+bb'=0$.

تمرين تطبيقي :

لتكن النقط $A(7;4)$ و $B(5;-2)$ و $C(2;1)$ من المستوى .

1) تحقق أن $3x-y-17=0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

2) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من C

4) مسافة نقطة عن مستقيم :

تعريف :

نعتبر مستقيما (D) و A نقطة لا تنتمي إلى (D) و H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

المسافة AH تسمى المسافة بين A و (D) ونرمز لها بالرمز : $d(A;(D))$ ونكتب : $d(A;(D))=AH$

نشاط تمهيدي :

نعتبر مستقيما (D) معادلته الديكارتية : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة لا تنتمي إلى (D) .

نعتبر H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

1) لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية على المستقيم (D) و B النقطة من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$.

بين أن لكل نقطة M من (D) لدينا : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

2) احسب $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ بدلالة x و y و x_A و y_A و a و b .

3) بين أن $AH\cdot AB=|ax_A+ay_B+c|$

4) استنتج أن : $d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

خاصية :

ليكن (D) مستقيما معادلته الديكارتية : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي : $d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

تمارين تطبيقية :

1) نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $x+y+2=0$ والنقطتين $A(1;-1)$ و $B(0;-2)$.

احسب $d(A;(D))$ و $d(B;(D))$.

2) نعتبر النقطتين $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$.

أ ــ تحقق أن $5x-4y-7=0$ هي معادلة المستقيم (AB) .

ب ــ احسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB) .

ج ـ استنتج مساحة المثلث OAB .

III ـ الدائرة (دراسة تحليلية) :

1) معادلة ديكارتية لدائرة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها 2 .

1) من بين النقط التالية حدد تلك التي تنتمي إلى الدائرة (C) : $A(3;1)$ ؛ $B(2;2)$ ؛ $C(\sqrt{3}+1;2)$ ؛ $D(-1;-1)$

2) لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى .

أ ـ احسب المسافة ΩM بدلالة x و y .

ب ـ بين أن M تنتمي إلى الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

المعادلة : $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ تسمى معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;1)$ وشعاعها 2 .

3) بإتباع نفس خطوات السؤال السابق حدد معادلة ديكارتية لدائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ 0)$.

خاصية :

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ 0)$ هي : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
وتكتب أيضا : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث : $c=a^2+b^2-R^2$.

تمارين تطبيقية :

1) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-1)$ وشعاعها $\sqrt{2}$.

2) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وتمر من النقطة $A(-1;1)$.

3) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي تمر من النقط $A(-1;0)$ و $B(1;2)$ و $C(7;4)$.

2) معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها :

نشاط تمهيدي :

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها R و $[AB]$ أحد أقطارها . ولتكن M نقطة من المستوى .

1) بين أن : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\Omega M^2-R^2$.

2) استنتج أن (C) هي مجوعة النقط M التي تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

3) نعتبر $A(2;3)$ و $B(-4;5)$ و $M(x;y)$ نقطة من (C) . حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) .

خاصية :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى .
مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ ؛
ومعادلتها هي : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$.

تمرين تطبيقي :

حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث : $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

3) تمثل برامتري لدائرة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و
M نقطة من (C) حيث : $(\overline{\vec{i};\overrightarrow{\Omega M}})\equiv\theta[2\pi]$. $(\theta\in IR)$.

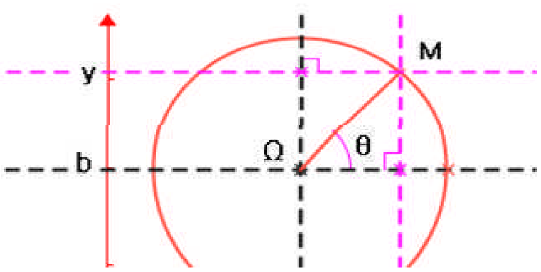
1) أ ـ بين أن : $\vec{i}\cdot\overrightarrow{\Omega M}=R\cos\theta$.

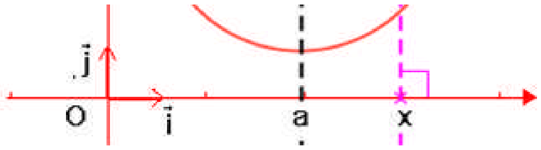
ب ـ بين أن : $\vec{j}\cdot\overrightarrow{\Omega M}=R\sin\theta$.

2) ليكن $(x;y)$ زوج إحداثيتي النقطة M .

أ ـ حدد زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{\Omega M}$.

ب ـ احسب $\vec{i}\cdot\overrightarrow{\Omega M}$ و $\vec{j}\cdot\overrightarrow{\Omega M}$ بدلالة x و y و a و b





ج ـ استنتج أن : $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$

النظمة $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R .

خاصية وتعريف :

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R \succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق : $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ (S) . النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) .

تمارين تطبيقية :

1) حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية : $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$.

2) حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق : $/(\theta \in IR)$ $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\sin\theta \end{cases}$.

4) دراسة مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$:

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

حدد طبيعة (Γ) .

لدينا :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \end{aligned}$$

نعتبر النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$. لدينا : $M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$.

- إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \prec 0$ فإن المتساوية $\Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ غير صحية وفي هذه الحالة : $(\Gamma) = \Phi$
- إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = 0$ فإن $\Omega M^2 = 0$ أي $\Omega = M$ ومنه فإن : $(\Gamma) = \{\Omega\}$
- إذا كان : $\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \succ 0$ فإن $\Omega M = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ وفي هذه الحالة : (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

خاصية :

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية و (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

- تكون (Γ) دائرة إذا وفقط إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c \succ 0$ ومركزها هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ وشعاعها $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.
- إذا كان : $a^2 + b^2 - 4c \prec 0$ فإن $(\Gamma) = \Phi$.

- إذا كان : $a^2+b^2-4c=0$ فإن $(\Gamma)=\{\Omega\}$ ؛ حيث : $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$.

تمرين تطبيقي :

حدد طبيعة المجموعة (C) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المعادلات التالية :

1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

2) $x^2+y^2-x-10y+25=0$.

3) $x^2+y^2+4x-y+\frac{17}{4}=0$

5) داخل وخارج الدائرة :

تعاريف :

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها R $(R\succ 0)$ و M نقطة من المستوى .

- تكون M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M=R$.
- تكون M نقطة داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M\prec R$.
- تكون M نقطة خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M\succ R$.

نتيجة :

لتكن (C) دائرة معادلتها الديكارتية : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $M(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى .

- تكون M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c=0$.
- تكون M نقطة داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c\prec 0$.
- تكون M نقطة خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : ${x_0}^2+{y_0}^2+ax_0+by_0+c\succ 0$.

تمرين تطبيقي :

1) لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-1;2)$ وشعاعها $R=3$. حدد وضع النقطتين $A(3;-1)$ و $B(0;1)$ بالنسبة للدائرة (C) .

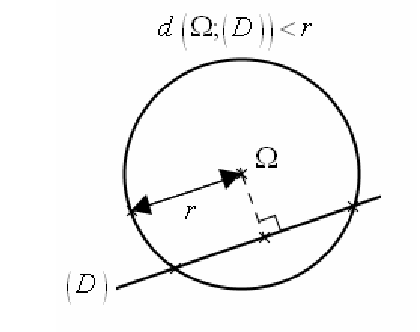
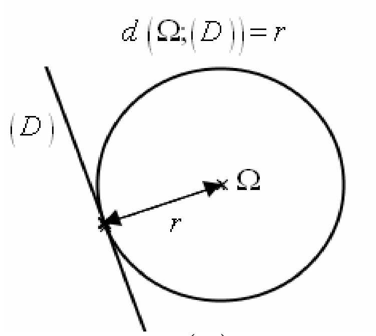
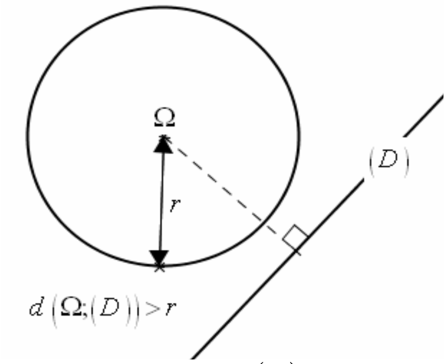
2) حل مبيانيا المتراجحات التالية :

أ ــ $x^2+y^2+6x-8y+23\geq 0$.

ب ــ $x^2+y^2-6x\prec 0$.

6) الأوضاع النسبة لدائرة ومستقيم :

لدراسة الوضع النسبي لدائرة (C) مركزها Ω وشعاعها r مع مستقيم (D) ؛ يمكن حساب مسافة (D) عن Ω ومقارنتها مع r .

 المستقيم (D) يقطع الدائرة في نقطتين .	 المستقيم (D) يقطع الدائرة في نقطة واحد . نقول إن المستقيم (D) مماسا للدائرة .	 المستقيم (D) لا يقطع الدائرة

تمرين تطبيقي :

ادرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية : 1) $(D) : x+y+3=0$ ؛ 2) $(D) : x-y+3+2\sqrt{2}=0$ ؛ 3) $(D) : 2x+y+1=0$

7) معادلة المماس لدائرة في نقطة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة (C) . وليكن (T) المستقيم المماس للدائرة (C) في A .

1) حدد متجهة منظمية على (T) .

2) بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (T) هي : $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$.

الجواب :

1) يكون المستقيم (T) مماسا للدائرة (C) في A إذا وفقط إذا كان (T) عموديا على المستقيم $(A\Omega)$.

إذن المتجهة $\overrightarrow{A\Omega}$ منظمية على المستقيم (T) .

2) تحديد معادلة ديكارتية ل (T) :

لدينا : $M(x;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow (x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$

خاصية 1 :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة (C) .
معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : $(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$.

ملاحظة :

إذا كانت الدائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية $x^2+y^2+ax+by+c=0$ فإن مركزها هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ في هذه الحالة معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : $(x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$.

خاصية 2 :

نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من الدائرة (C) .
معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : $(x-x_0)\left(\frac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\frac{b}{2}+y_0\right)=0$

تمارين تطبيقية :

1) نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-1;-2)$ وشعاعها $R=2$.

أ ـ تحقق أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى الدائرة (C) .

ب ـ حدد معادلة المماس للدائرة (C) في A .

2) نعتبر الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية : $x^2+y^2-2x+4y-11=0$.

أ ـ تحقق أن النقطة $A(1;2)$ تنتمي إلى الدائرة (C) .

ب ـ حدد معادلة المماس للدائرة (C) في A .