



## I. تذكير:

### 01. تعاريف:

**1.**  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان من المستوى حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . الجداء السلمي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  والذي يرمز له ب:  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  هو

1. إذا كان  $\vec{v} = \vec{0}$  أو  $\vec{u} = \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

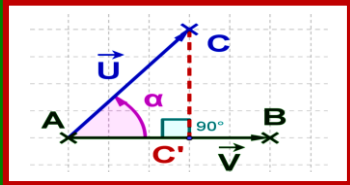
2. إذا كان  $\vec{v} \neq \vec{0}$  و  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $H$  المسقط العمودي ل  $C$  على  $(AB)$  (مع  $A \neq B$  لأن  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) فإن:

أ-  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  حيث  $\overrightarrow{AH}$  و  $\overrightarrow{AB}$  لهما نفس الاتجاه.

ب-  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  حيث  $\overrightarrow{AH}$  و  $\overrightarrow{AB}$  لهما اتجاهين متعاكسين.

**2.**  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$  يسمى المربع السلمي ل  $\overrightarrow{AB}$  أو ل  $\vec{u}$ .

**3.** العدد الحقيقي الموجب  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$  يسمى منظم المتجهة  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  ونرمز له ب  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$  أو  $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ . و  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ .



### 02. خاصيات الجداء السلمي:

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  متجهات من المستوى حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  و  $\alpha$  عدد حقيقي.

**1.** الصيغة المثلثية للجداء السلمي: (مع  $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  و  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ) نضع  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$  لدينا:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \alpha$$

أو أيضا:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha$  (مع  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$ )

**2.** تماثلية الجداء السلمي:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

**3.** خطانية الجداء السلمي:

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

**4.** موجبة الجداء السلمي:  $\vec{u}^2 \geq 0$ .

**5.** الجداء السلمي غير ناثي:  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

**6.** تعامد متجهتان:  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدين ( $\vec{u} \perp \vec{v}$ ) يعني  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### 03. الأساس والمعلم ( المتعامد الممنظم المباشر )

**1.**  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  أساس في المستوى  $(P)$  (أي  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  غير مستقيمتين) و  $O$  نقطة من  $(P)$ .

**2.**  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  يسمى أساس متعامد ممنظم يعني  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  و  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . وفي هذه الحالة  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  يسمى معلم متعامد ممنظم.

**3.**  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  يسمى أساس متعامد ممنظم مباشر يعني  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  أساس متعامد ممنظم و  $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ .

**4.**  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  يسمى معلم متعامد ممنظم مباشر (م.م.م.م) يعني  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  أساس متعامد ممنظم مباشر.



## II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي ومنظم متجهة في م.م.م :

### A. الصيغة التحليلية ل : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و $AB$ .

#### 01. نشاط :

فيما تبقى من الدرس  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  م.م.م (معلم متعامد منظم مباشر).

$$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ و } \vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j} \text{ متجهتين من } (P)$$

1. أحسب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$  ثم  $\|\vec{u}\|$  بدلالة  $x$  و  $y$ .

2. أعط شرط ضروري وكافي لتعامد  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$

أحسب المسافة:  $AB$  مع  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  .

3. أعط الخاصية:

#### 02. خاصية :

$$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ و } \vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j} \text{ متجهتان من المستوى } (P) .$$

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$$

$$2. \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3. AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2)} \text{ مع } A(x_A, y_A) \text{ و } B(x_B, y_B)$$

$$4. \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

#### 03. مثال :

1. أحسب :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  و  $\|\vec{u}\|$  و  $\|\vec{v}\|$  مع  $\vec{u}(2, -4)$  و  $\vec{v}(-1, 2)$  و  $A(1, 0)$  و  $B(-1, 0)$  .

2. حدد المتجهات  $\vec{v}(x, y)$  الواحدية والمتعامدة مع  $\vec{u}(2, -4)$  . ( $\|\vec{v}\| = 1$  واحدية يكافئ)

3. أ- بين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $A$  حيث:  $A(1, 3)$  و  $B(3, 1)$  و  $C(-3, -1)$  .

ب - حدد متجهة موجهة للارتفاع المار من  $A$  للمثلث  $ABC$

B. إحداثيتا متجهة في أساس م.م - المعلمة القطبية

Coordonnées d'un vecteur - Repérage polaire

#### 01. نشاط

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  متجهة من المستوى  $(P)$  و  $M$  نقطة من  $(P)$

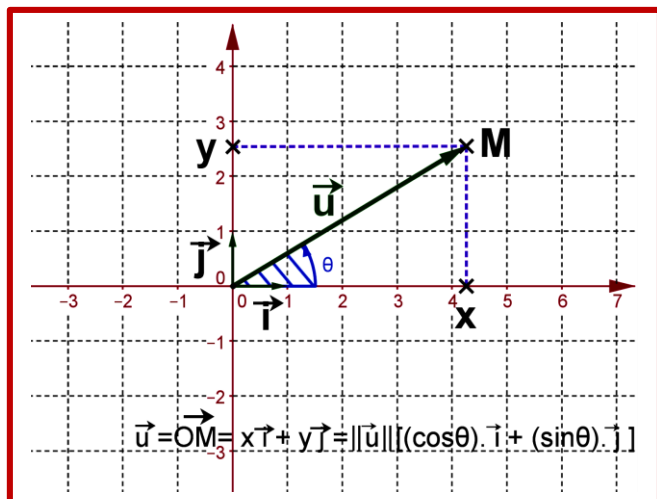
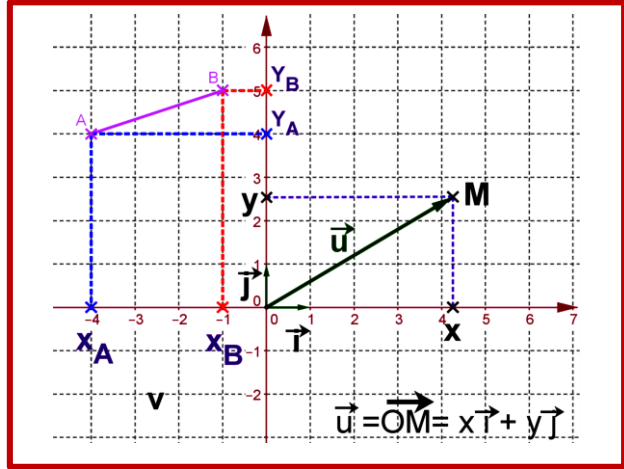
$$\text{حيث } \overrightarrow{OM} = \vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ و } (\vec{i}, \vec{u}) \equiv \theta [2\pi]$$

$$1. \text{بين أن : } (\vec{u}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$$

2. أحسب  $\vec{i} \cdot \vec{u}$  و  $\vec{j} \cdot \vec{u}$  كل من هما بطريقتين مختلفتين .

3. استنتج أن :  $x = \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u})$  و  $y = \|\vec{u}\| \sin(\vec{i}, \vec{u})$  .

4. استنتج كتابة جديدة ل  $\vec{u}$  .





5. أعط الخاصية.

02. مفردات :

الزاوية :  $(\vec{i}, \vec{u})$  تسمى الزاوية القطبية للمتجهة  $\vec{u}$ .  $\theta$  يسمى قياس الزاوية القطبية للمتجهة  $\vec{u}$ .

03. خاصية:

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  متجهة غير منعدمة من المستوى  $(\mathcal{P})$ .  $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \theta [2\pi]$  لدينا:

$$1. \quad x = \vec{i} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \quad \text{و} \quad y = \vec{j} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \sin(\vec{i}, \vec{u})$$

$$2. \quad \vec{u} = \|\vec{u}\| \left( \cos(\vec{i}, \vec{u}) \vec{i} + \sin(\vec{i}, \vec{u}) \vec{j} \right)$$

C. متفاوتة كوشي شوارز- المتفاوتة المثلثية :

**l'inégalité de Cauchy – Schwarz + l'inégalité triangulaire**

01. نشاط :

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان من المستوى  $(\mathcal{P})$ .

1. بين أن :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

2. بين أن :  $(\vec{u}, \vec{v})$  مستقيمتان  $\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

3. أ - بين أن :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  . ب - أعط الخاصية.

جواب:

1. نبين أن :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

حالة 1 :  $\vec{v} = \vec{0}$  أو  $\vec{u} = \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  و  $\|\vec{u}\| = 0$  أو  $\|\vec{v}\| = 0$  إذن  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

حالة 2 :  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$

لدينا:

$$|\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

ومنه :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

2. بين أن :  $(\vec{u}, \vec{v})$  مستقيمتان  $\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

نضع :  $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  (1)

$$(1) \Leftrightarrow |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \quad \text{أو} \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$$



$$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi \text{ أو } (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$$

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان  $\Leftrightarrow$

**خلاصة:** ( $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان)  $\Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

**3** نبين أن:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

حسب متفاوتة كوشي شوارز:  $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  : (2)

$$(2) \Leftrightarrow 2 \times \|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \quad (\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2)$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

**خلاصة:**  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)$

**02. خاصية:**

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان من المستوى ( $\mathcal{P}$ ). لدينا:

**1**  $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  . (متفاوتة كوشي - شوارز)

**2**  $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان})$

**3**  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$  (المتفاوتة المثلثية)

**III. صيغة  $\sin(\vec{u}; \vec{v})$  و  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$**

**A صيغتي:**  $\sin(\vec{u}; \vec{v})$  و  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$ :

**01. نشاط:**

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  متجهتان غير منعمتين

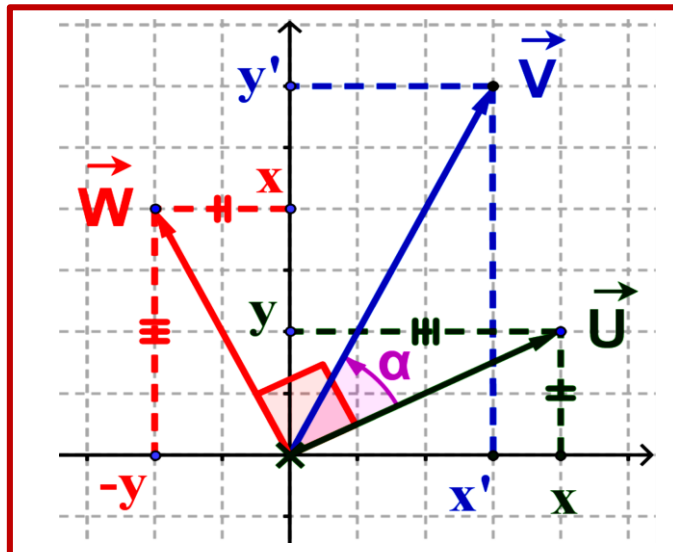
من ( $\mathcal{P}$ ). مع  $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha (2\pi)$ . المتجهة  $\vec{w}(-y; x)$

نعتبر المتجهة:  $\vec{w}(-y; x)$ . أنظر الشكل:

**1** أوجد  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$ .

**2** 1- أحسب  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  و  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  ثم  $\|\vec{u}\|$  و  $\|\vec{w}\|$  ماذا تلاحظ؟

ب- بين:  $(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2} - \alpha (2\pi)$ .





$$\left. \begin{aligned} (\vec{u}; \vec{w}) &= (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) : (2\pi) \\ \frac{\pi}{2} &= \alpha + (\vec{v}; \vec{w}) : (2\pi) \end{aligned} \right\} \text{جواب :}$$

ج - أعط الصيغة المثلثية ل  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  ثم استنتج  $\sin \alpha$ . جواب :  $\left( \sin \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} \right)$

د- استنتج  $\sin \alpha$  بدلالة  $\det(\vec{u}; \vec{v})$  و  $\|\vec{u}\|$  و  $\|\vec{v}\|$  ثم بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$ .. جواب :  $\left( \sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)$

## 02. خاصية :

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  و  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  متجهتان غير منعدمتين من  $(\mathcal{P})$ . مع  $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha (2\pi)$ .

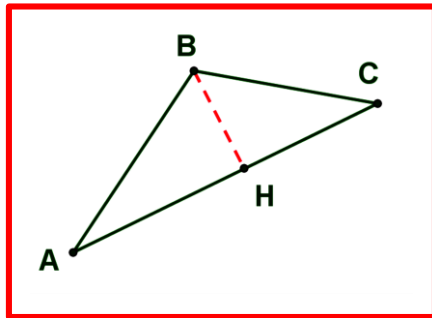
$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \underline{1}$$

$$\sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \underline{2}$$

## B. مساحة مثلث :

### 01. نشاط :

نعتبر في المستوى  $(\mathcal{P})$  مثلث ABC غير منطبق. H المسقط العمودي ل C على (AB) (مع  $A \neq B$ ).



1. أعط المساحة S للمثلث ABC.

2. أعط المساحة S بدلالة  $\left| \sin \left( (\vec{AB}, \vec{AC}) \right) \right|$ .

3. أعط المساحة S بدلالة  $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ .

4. استنتج مساحة متوازي الأضلاع ABCD

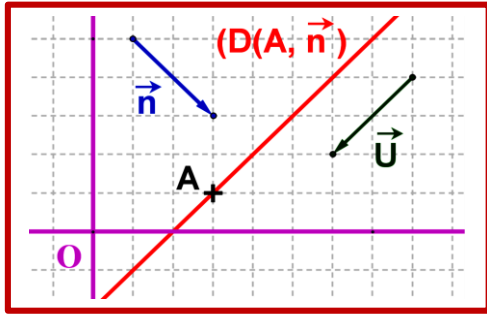
5. أعط الخاصية:

## 02. خاصية:

نعتبر في المستوى  $(\mathcal{P})$  مثلث ABC ومتوازي الأضلاع ABCD.

• لدينا :  $S_{ABC}$  مساحة المثلث ABC هي :  $S = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$

• لدينا :  $S_{ABCD}$  مساحة متوازي الأضلاع ABCD هي :  $S = \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$



#### IV. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية) :

**A** متجهة منظمية على مستقيم: vecteur normal

##### 01. نشاط :

$D(A, \vec{n})$  مستقيم من المستوى  $(P)$ .  $\vec{n}$  متجهة من  $(P)$ .

ماذا تلاحظ ؟

##### 02. تعريف :

$D(A, \vec{n})$  مستقيم من المستوى  $(P)$ .

كل متجهة  $\vec{n}$  غير منعدمة من  $(P)$  و متعامدة مع  $\vec{u}$  تسمى متجهة منظمية على المستقيم  $D(A, \vec{u})$ .

##### 03. ملحوظة :

**1**  $\vec{n}$  منظمية على مستقيم  $(D)$  كذلك  $\alpha \cdot \vec{n}$  منظمية على  $(D)$  مع  $\alpha \neq 0$ .

**2**  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  منظميتان على  $(D)$  إذن  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  مستقيمتان.

**3**  $\vec{n}(a, b)$  منظمية على  $(D)$  يكافئ  $\vec{u}(-b, a)$  موجهة ل  $(D)$ .

**B** مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

##### 01. نشاط :

A نقطة من  $(P)$  و  $\vec{n}$  متجهة غير منعدمة.

حدد مجموعة النقط  $M(x, y)$  من  $(P)$  حيث  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

##### 02. خاصية :

مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوى  $(P)$  التي تحقق  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  هي المستقيم  $D(A, \vec{n})$  المار من A و  $\vec{n}$  متجهة منظمية عليه.

**C** معادلة ديكارتية للمستقيم  $D(A, \vec{n})$ .

##### 01. نشاط :

$D(A, \vec{n})$  مستقيم من  $(P)$  حيث يمر من النقطة  $A(x_A, y_A)$  و  $\vec{n}(a, b)$  منظمية عليه. بين أن:

**1**  $M(x, y) \in D(A, \vec{n})$  فإن  $ax + by + c = 0$  مع تحديد c.

**2** ندرس العكس : E مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوى  $(P)$  التي تحقق  $ax + by + c = 0$  مع  $(a, b) \neq (0, 0)$  فإن E هي

المستقيم  $D(A, \vec{n})$ .

جواب :

**1** نبين أن:  $ax + by + c = 0$  و نحدد c :



$$M(x, y) \in D(A, \vec{n}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_A - by_A)$$

$$. ax + by + c = 0 ; (c = -ax_A - by_A) \text{ خلاصة:}$$

**2) ندرس العكس :**

لدينا E مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوى  $(P)$  التي تحقق  $ax + by + c = 0$  (1) مع  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

هل هذه المجموعة E مستقيم (D) حيث  $\vec{n}(a, b)$  متجهة منظمة على (D).

هذه المجموعة E غير فارغة لأن  $C(-\frac{c}{a}, 0) \in E$  (إذا افترضنا  $a \neq 0$  أما إذا افترضنا  $b \neq 0$  نأخذ  $C'(0, -\frac{c}{b}) \in E$ )

نعتبر نقطة  $A(x_A, y_A) \in E$  ومنه:  $ax_A + by_A + c = 0$  (2)

من خلال فرق ل (1) و (2) نحصل على :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \quad \text{إذن : } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

خلاصة :  $M(x, y)$  نقطة من المستقيم (D) المار من A و متجهة منظمة عليه  $\vec{n}(a, b)$ .

**02. مفردات :**

المعادلة  $ax + by + c = 0$  تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم  $D(A; \vec{n})$  المار من  $A(x_A, y_A)$  و متجهة منظمة عليه  $\vec{n}(a, b)$ .

**03. خاصية و تعريف :**

$M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$  نقطة من المستوى  $(P)$  هي من المستقيم  $D\left(A\left(\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\right); \vec{n}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)\right)$  إذا وفقط إذا كان  $ax + by + c = 0$  مع  $c = -ax_A - by_A$  و  $(a, b) \neq (0, 0)$ . المعادلة  $ax + by + c = 0$  تسمى المعادلة الديكارتية ل  $D(A, \vec{n})$ .

**04. ملاحظة :**

المعادلة الديكارتية  $ax + by + c = 0$  (D) متجهة منظمة على D هي  $\vec{n}(a, b)$  و متجهة موجهة له هي  $\vec{u}(-b, a)$ .

**05. تطبيق :**

**1.** أعط المعادلة الديكارتية للمستقيم  $D\left(A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right); \vec{n}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)\right)$ .

**2.** نعتبر المثلث ABC حيث  $A(2, 1)$  و  $B(0, 1)$  و  $C(-2, 3)$

**أ-** حدد معادلة ديكارتية لوسط [AB] ثم ل [BC].

**ب-** حدد احداثيتي  $\Omega$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

جواب :



**1** نعطي المعادلة الديكارتية للمستقيم:

بما أن  $\vec{n}(1,5)$  متجهة منظمية على  $D$  إذن المعادلة هي على شكل :  $(D): 1x + 5y + c = 0$ .

بما أن:  $A(2,0) \in (D): 1 \times 2 + 5 \times 0 + c = 0$  إذن  $c = -2$

**خلاصة:** معادلة ديكارتية هي:  $(D): 1x + 5y - 2 = 0$ .

**2** معادلة الواسطان:

معادلة الواسط  $[AB]$ .

بما أن:  $(D)$  واسط  $[AB]$  إذن:  $(AB) \perp (D)$  و  $(D)$  يمر من  $I(1,1)$  منتصف  $[AB]$ .

ومنه:  $M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0$$

ومنه:  $(D): x-1 = 0$ .

معادلة الواسط  $[BC]$ .

بما أن:  $(D')$  واسط  $[BC]$  إذن:  $(BC) \perp (D')$  و  $(D')$  يمر من  $J(-1,2)$  منتصف  $[BC]$ .

ومنه:  $M(x,y) \in (D') \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 6 = 0$$

ومنه:  $(D'): -x + y - 3 = 0$

**3** احداثيتي  $\Omega$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  نعلم أن نقطة تلاقي الواسطات لمثلث هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

ومنه:  $(1): \Omega(x,y) \in (D) \cap (D')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

**خلاصة:**  $\Omega(1,4)$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

**D** شرط تعامد  $(D)$  و  $(D')$ :

**01** نشاط:  $D(A, \vec{u})$  و  $D'(B, \vec{u}')$  مستقيمان من  $(P)$

**1** أوجد شرط ضروري و كافي حيث  $(D') \perp (D)$ .

**2** نفس السؤال:  $D(A, \vec{u})$  و  $D'(B, \vec{u}')$  ( $\vec{u}$  موجهة و  $\vec{n}$  منظمية)

**02** خاصية:

نعتبر المستقيمين  $(D): ax + by + c = 0$  و  $(D'): a'x + b'y + c' = 0$  حيث  $\vec{n}(a,b)$  و  $\vec{n}'(a',b')$

$$(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0 \text{ . على التوالي } (D) \text{ و } (D')$$





**01. مثال :**  $(D) : 2x + y - 3 = 0$  أوجد معادلة ديكارتية ل  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$  حيث  $(D') \perp (D)$ .  
**E** مسافة نقطة عن مستقيم :

**01. نشاط :**

ما هي أقرب مسافة بين A و المستقيم  $(D)$  ؟

**02. تعريف :**

$D(A, \vec{u})$  مستقيم من المستوى  $(P)$  و A نقطة من  $(P)$  حيث  $H$  المسقط العمودي ل A على  $(D)$ .  
المسافة  $AH$  تسمى المسافة النقطة A عن  $(D)$  ونرمز لها ب :  $d(A, (D)) = d = AH$

**03. نشاط :**

$(D) : ax + by + c = 0$  مستقيم من المستوى  $(P)$ . A نقطة من  $(P)$  حيث  $H(x_H, y_H)$  المسقط العمودي ل A على  $(D)$ .

**1. أ - بين أن :**  $c = -ax_H - by_H$

**ب - بين أن :**  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$

**2. أ - بين أن :**  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = \|\vec{n}\| AH$

**ب - استنتج كتابة ل AH بدلالة a و b و c و  $x_A$  و  $y_A$ .**

**04. خاصية :**

$d(A; D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  لدينا  $(P)$  نقطة من  $(P)$  و  $(D) : ax + by + c = 0$  مستقيم من المستوى  $(P)$

**05. مثال :**

$d(A; D) = \frac{|-2 + 5 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = 0$  لدينا : A(2,5) و  $(D') : -x + y - 3 = 0$

**V. الدائرة في المستوى - دراسة تحليلية -**

**A. معادلة ديكارتية لدائرة  $C(\Omega(a, b); r)$  :**

**01. نشاط :**

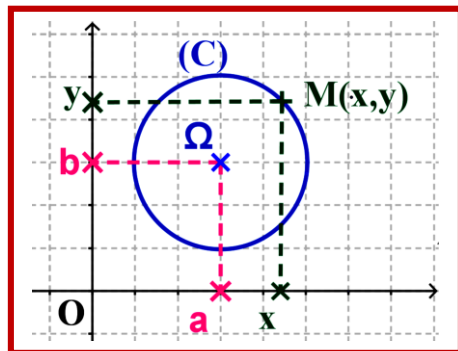
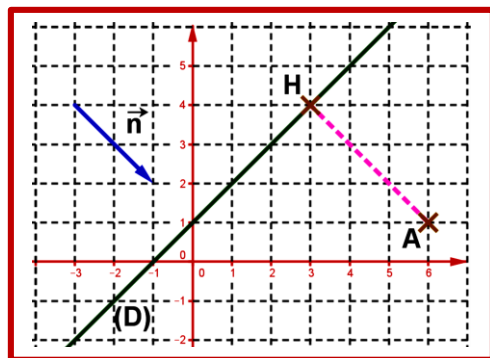
$\Omega(a, b)$  نقطة من  $(P)$  و r من  $\mathbb{R}^+$ .

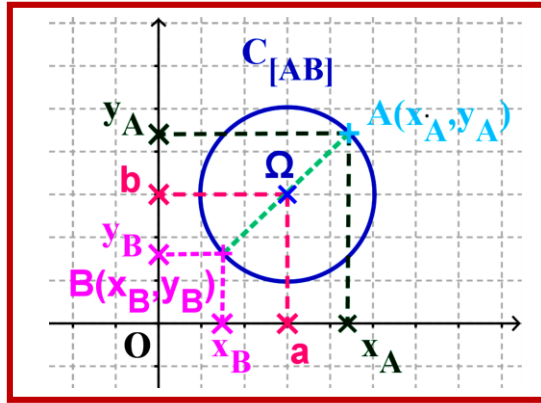
أتمم التكافؤ الاتي مستعملا a و b و x و y  $M(x, y) \in C(\Omega(a, b); r) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

**02. خاصية :**

كل دائرة  $C(\Omega(a, b); r)$  من  $(P)$  لها معادلة ديكارتية على شكل :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  أو أيضا :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  مع  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .





**03. مثال :** مثال 1 : أوجد معادلة ديكارتية لـ  $C(\Omega(0,0);1)$ .

مثال 2 :  $A(1;0)$  و  $B(-1;0)$  أوجد معادلة ديكارتية لـ  $C_{[AB]}$

**B. معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها :**

**01. نشاط :**

نقطة  $M(x;y)$  من  $(\mathcal{P})$  هي الدائرة التي قطرها  $[AB]$  مع  $B \neq A$ .

أوجد شرط ضروري وكافي لـ (1) .  $M(x;y) \in C_{[AB]}$  (1):

**02. خاصية :**

$M(x;y) \in C[A;B] \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$  وهي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة التي قطرها  $[A;B]$  ونرمز لها بـ:  $C_{[AB]}$

**03. مثال :**

$A(1;0)$  و  $B(-1;0)$  من  $(\mathcal{P})$  أوجد معادلة ديكارتية لـ  $C_{[AB]}$

**جواب :** نجد معادلة ديكارتية لـ  $C_{[AB]}$  :

$$M(x;y) \in C_{[A;B]} \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

**خلاصة :**  $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$

**C. الدائرة المارة من 3 نقط غير مستقيمة:**

**خاصية :**

الدائرة المارة من ثلاث نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمة هي الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  حيث مركزها  $\Omega$  تلاقي واسطاته وشعاعها هو  $r = \Omega A$ .

**D. تمثيل بارامترى لدائرة :**

**01. نشاط :**

دائرة  $C(\Omega(a,b);r)$  من المستوى  $(\mathcal{P})$  منسوب إلى معلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $\theta : (2\pi) \equiv \vec{i}, \Omega \vec{M}$  ;  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**1. أحسب  $\vec{i} \cdot \Omega \vec{M}$  ;  $\vec{j} \cdot \Omega \vec{M}$**

**2. ما هي إحداثيتي  $M$  بالنسبة للمعلم  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ .**

**3. من خلال  $\overline{OM} = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega M}$  بين :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$**

**02. خاصية :**

دائرة  $C(\Omega(a,b);r)$  من المستوى  $(\mathcal{P})$  منسوب إلى معلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $\theta : (2\pi) \equiv \vec{i}, \Omega \vec{M}$  ;  $\theta \in \mathbb{R}$ .

لدينا لكل  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  نقطة من  $(\mathcal{P})$  :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$

وهي تسمى تمثيل بارامترى للدائرة  $C(\Omega(a,b);r)$ .



### 03. مثال :

أعط تمثيل بارامترى للدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**F.** دراسة مجموعة النقط :  $\{M(x, y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$

### 01. نشاط :

**1.** أوجد مجموعة النقط  $M(x, y)$  من  $(P)$  التي تحقق ما سبق .

**2.** أعط الخاصية.

### 02. خاصية :

مجموعة النقط  $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$  من  $(P)$  التي تحقق:  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  هي

- $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$  ليس هناك نقطة  $S = \emptyset$ .
- $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$  هي النقطة  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  أو مجموعة الحلول هي  $S = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)\right\}$
- $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$  مجموعة الحلول هي الدائرة  $S = (C) = C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}\right)$

### G. دراسة الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم:

#### 01. نشاط :

أرسم الأوضاع النسبية لـ  $(D)$  و  $(C)$  ثم أعط التعاريف والخصائص.

$(D) \cap (C) = \emptyset$	$(D) \cap (C) = \{A\}$	$(D) \cap (C) = \{A, B\}$
المستقيم $(D)$ خارج الدائرة $(C)$	المستقيم $(D)$ مماس لدائرة $(C)$ في نقطة $A$	المستقيم $(D)$ يقطع الدائرة $(C)$ في نقطتين $A$ و $B$

### 02. تعاريف وخصائص :

$(D)$  مستقيم من المستوى  $(P)$  و  $(C)$  دائرة من المستوى  $\Omega$ . مركز الدائرة و  $r$  شعاعها .

**1.**  $(D)$  هو خارج الدائرة  $(C)$  يعني  $D$  و  $(C)$  ليس لهما نقطة مشتركة  $(D) \cap (C) = \emptyset$ .

**خاصية:**  $(D)$  هو خارج الدائرة  $(C)$  يكافئ  $d(\Omega, (D)) > r$

**2.**  $(D)$  و  $(C)$  يتقاطعان يعني  $(D)$  و  $(C)$  لهما نقطتين مشتركيتين  $A$  و  $B$ .  $(D) \cap (C) = \{A, B\}$ .



خاصية: (D) و (C) يتقاطعان في A و B يكافئ  $d(\Omega, (D)) < r$

3. (D) مماس ل (C) يعني (D) و (C) لهما نقطة مشتركة هي A.  $(D) \cap (C) = \{A\}$ .

خاصية: (D) مماس ل (C) في A يكافئ  $d(\Omega, (D)) = r$

H. معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة:

01. نشاط:

نعتبر المستقيم  $D(A; \vec{u})$  المماس ل  $C(\Omega, r)$  في A حيث A من (C). (أنظر الشكل)

1. أوجد الشرط الضروري والكافي حيث نقطة  $M(x, y)$  تنتمي ل  $D(A; \vec{u})$ .

2. استنتج معادلة  $D(A; \vec{u})$  المماس ل  $C(\Omega, r)$  في A

3. أعط الخاصية.

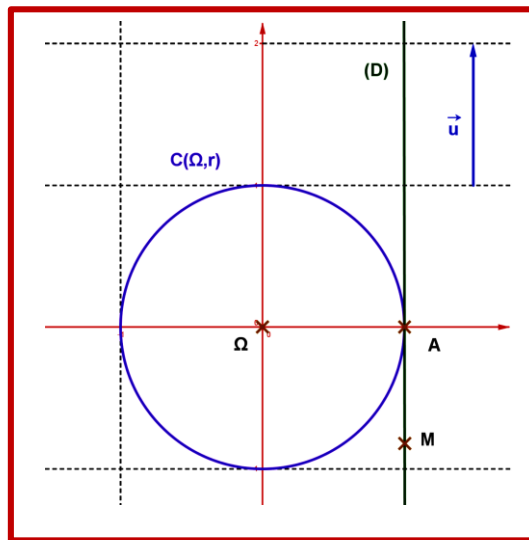
02. خاصية المعادلة الديكارتية للمماس في نقطة من (C)

معادلة ديكارتية للمماس  $D(A; \vec{u})$  للدائرة  $C(\Omega(a; b); r)$  في  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  من الدائرة (C) هي  $\vec{\Omega A} \cdot \vec{u} = 0$  أي  $\begin{pmatrix} x_A - a \\ y_A - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = 0$

03. مثال:

أنظر الشكل .

1. أعط المعادلة الديكارتية ل (D). بطريقة مبيانية.



VI. مجموعة النقط M من المستوى حيث :  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k$  ثم  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$  ثم  $MA^2 + MB^2 = k$  ثم  $MA^2 - MB^2 = k$  مع  $k \in \mathbb{R}$

حالة 1:  $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = k$  (أو  $\vec{MA} \cdot \vec{u} = k$  و  $\vec{u} \neq \vec{0}$ )

A و B نقطتان من المستوى (P) حيث :  $AB = 6$  و I منتصف [AB]

1. حدد (E<sub>1</sub>) مجموعة النقط M من (P) حيث :  $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = 0$ .

2. حدد (E<sub>2</sub>) مجموعة النقط M من (P) حيث :  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -12$ .

3. حدد (E<sub>3</sub>) مجموعة النقط M من (P) حيث :  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 18$ .



حالة 2:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

1. حدد  $(F_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .
2. حدد  $(F_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$ .
3. حدد  $(F_3)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -9$ .
4. حدد  $(F_3)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -10$ .

حالة 3:  $MA^2 + MB^2 = k$

1. حدد  $(G_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 + MB^2 = 68$ .
2. حدد  $(G_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 + MB^2 = 18$ .
3. حدد  $(G_3)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 + MB^2 = 4$ .

حالة 4:  $MA^2 - MB^2 = k$

1. حدد  $(H_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 - MB^2 = 0$ .
2. حدد  $(H_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 - MB^2 = 36$ .

▲ ملحوظة: يمكنك أن تحدد مجموعة النقط السابقة و للحالات الأربع بصفة عامة أي أخذ  $k \in \mathbb{R}$  و  $AB$  وتناقش بفصل الحالات .