



I. تذكير:

## II. تعريف: 01

1.  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متوجهان من المستوى حيث  $\vec{u} = \vec{AB}$  و  $\vec{v} = \vec{AC}$ . الجداء السلمي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و الذي يرمز له ب:  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  هو

إذا كان  $\vec{v} = \vec{0}$  أو  $\vec{u} = \vec{0}$  فإن  $\vec{0}$

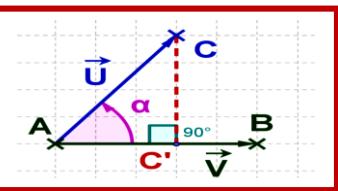
إذا كان  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$  و  $\vec{H}$  المسقط العمودي ل  $C$  على  $(AB)$  (مع  $A \neq B$  لأن  $\vec{0} \neq \vec{u}$ ) فلن:

أ.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$  حيث  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$  لهما نفس الاتجاه.

ب.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$  حيث  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  لهما اتجاهين متعاكسين.

2. العدد الحقيقي الموجب  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  يسمى المربع السلمي ل  $\vec{AB}$  أول  $\vec{u}$ .

3. العدد الحقيقي الموجب  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$  يسمى منظم المتجهة  $\vec{u} = \vec{AB}$  ويرمز له ب



## III. خصائص الجداء السلمي: 02

و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  متوجهات من المستوى حيث  $\vec{u} = \vec{AB}$  و  $\vec{v} = \vec{AC}$  و  $\alpha$  عدد حقيقي.

1. الصيغة المثلثية للجاء السلمي: (مع  $\vec{0} \neq \vec{AB}$  و  $\vec{AC} \neq \vec{0}$ ). نضع  $(2\pi)$  لدينا:  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \alpha$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \cos \alpha$

أو أيضا:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha$  (مع  $\vec{0} \neq \vec{u}$  و  $\vec{0} \neq \vec{v}$ )

2. تماثلية الجداء السلمي:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

3. خطانية الجداء السلمي:

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

4. موجبة الجداء السلمي:  $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0$

5. الجداء السلمي غير ناٹي:  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

6. تعاون متوجهان:  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعادلين ( $\vec{u} \perp \vec{v}$ ) يعني  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

## IV. الأساس و المعلم (المتعادم المنظم المباشر): 03

1. أساس في المستوى  $(\mathcal{P})$  (أي  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  غير مستقيمتين) و  $O$  نقطة من  $(\mathcal{P})$ .

2. يسمى أساس متعادم منظم يعني  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  و  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . وفي هذه الحالة  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  يسمى معلم متعادم منظم.

3. يسمى أساس متعادم منظم مباشر يعني  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \frac{\pi}{2}$  (2π) أساس متعادم منظم و  $B = (\vec{i}, \vec{j})$

4. يسمى معلم متعادم منظم مباشر ( $M.M.M$ ) يعني  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  أساس متعادم منظم مباشر.





٥ أعط الخاصية.

٠٢ مفردات :

الزاوية :  $\theta$  تسمى الزاوية القطبية للمتجهة  $\vec{u}$ .  $\theta$  يسمى قياس الزاوية القطبية للمتجهة  $\vec{u}$ .

٠٣ خاصية:

$$\vec{u}(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \theta [2\pi]. (\mathcal{P}) \text{ لدينا: } \vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$y = \vec{j} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \sin(\vec{i}, \vec{u}) \text{ و } x = \vec{i} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \quad ١$$

$$\vec{u} = \|\vec{u}\| \left( \left( \cos(\vec{i}, \vec{u}) \right) \vec{i} + \sin(\vec{i}, \vec{u}) \vec{j} \right) \quad ٢$$

٠٤ متفاوتة كوشي شوارز - المتفاوتة المثلثية :

**C. L'inégalité de Cauchy – Schwarz + l'inégalité triangulaire**

٠١ نشاط :

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان من المستوى  $(\mathcal{P})$ .

**D** بين أن :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

**C2** بين أن :  $(\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}) \Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

**C3** أ - بين أن :  $|\vec{u} + \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . ب - أعط الخاصية.

جواب:

**D** نبين أن :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

حالة ١ :  $\vec{u} = \vec{0}$  أو  $\vec{v} = \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$  . إذن  $\|\vec{u}\| = 0$  أو  $\|\vec{v}\| = 0$

حالة ٢ :  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$

لدينا:

$$|\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

ومنه :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

**C2** بين أن :  $(\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}) \Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

نضع :  $(1) : \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

$$(1) \Leftrightarrow |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \text{ أو } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$$



$$\Leftrightarrow \left( \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right) = 2k\pi \text{ أو } \left( \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right) = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{v}} \text{ و } \overrightarrow{\mathbf{u}} \text{ مستقيمتان}$$

**خلاصة:**  $\left( \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right) = 2k\pi \text{ و } \overrightarrow{\mathbf{v}} \text{ و } \overrightarrow{\mathbf{u}} \text{ مستقيمتان}$

نبين أن:  $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\| \leq \left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| + \left\| \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\|$  (3)

$$(2) : \|\vec{u} \cdot \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \quad \text{حسب متفاوتة كوشي شوارز:}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \Leftrightarrow 2 \times |\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| &\leq 2 \times \|\vec{\mathbf{u}}\| \times \|\vec{\mathbf{v}}\| \\
 \Leftrightarrow \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 + 2|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| &\leq \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{u}}\| \times \|\vec{\mathbf{v}}\| \\
 \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}})^2 &\leq (\|\vec{\mathbf{u}}\| + \|\vec{\mathbf{v}}\|)^2 \quad \left( \vec{\mathbf{u}}^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 \right) \\
 \Leftrightarrow \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 &\leq (\|\vec{\mathbf{u}}\| + \|\vec{\mathbf{v}}\|)^2
 \end{aligned}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

## ٠٢. خاصية :

و  $\vec{v}$  متجهان من المستوى  $(P)$ . لدينا:

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \times \|\mathbf{v}\|$$

$$\cdot \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}) \quad \underline{\underline{2}}$$

$$(\text{المتفاوتة المثلثية}) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \quad .3$$

$$\vec{v}(x', y') = x' \vec{i} + y' \vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{u}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j}$$

من  $(P)$  مع  $(2\pi)$  .  $\overrightarrow{w}(-y; x)$  .  $\overrightarrow{u, v}$   $\equiv \alpha$  . المتجهة

نعتبر المتجهة  $\vec{w}(-y; x)$ . انظر الشكل :

أوجد  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$  بدلالة  $x$  و  $y$  و  $x'$  و  $y'$ .

١- أحسب  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  و  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  ثم ماذا تلاحظ؟

$$\rightarrow \cdot \overrightarrow{(\vec{v}, \vec{w})} \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \ (2\pi) :$$



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{(\mathbf{u}; \mathbf{w})} &\equiv \overrightarrow{(\mathbf{u}; \mathbf{v})} + \overrightarrow{(\mathbf{v}; \mathbf{w})} : (2\pi) \\ \frac{\pi}{2} &\equiv \alpha + \overrightarrow{(\mathbf{v}; \mathbf{w})} : (2\pi) \end{aligned} \right\} : \text{جواب}$$

ج - أعط الصيغة المثلثية ل  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  ثم استنتج  $\sin \alpha$ . جواب:

$$\left( \sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right) \text{ ثم بدلالة } \vec{x} \text{ و } \vec{y} \text{ و } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{.. جواب: } 5. \text{ استنتج } \sin \alpha \text{ بدلالة } \vec{u} \text{ و } \vec{v}.$$

## ٠٢. خاصية :

•  $\overrightarrow{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \alpha (2\pi) \vec{v}$  متجهتان غير منعدمتين من  $(\mathcal{P})$ . مع  $\vec{v}(x', y') = x' \vec{i} + y' \vec{j}$  و  $\vec{u}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{.1}$$

$$\sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \underline{\underline{2}}$$

### B. مساحة مثلث :

## ٠١. نشاط :

نعتبر في المستوى  $(P)$  مثلث  $ABC$  غير منبطح.  $H$  المسقط العمودي ل  $C$  على  $(AB)$  (مع  $A \neq B$ ).

D. أعط المساحة  $S$  للمثلث  $ABC$ .

أعط المساحة  $S$  بدلالة  $\left| \sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \right|$  (2)

أعط المساحة  $S$  بدلالة  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  . (3)

#### 4) استنتاج مساحة متوازي الأضلاع ABCD

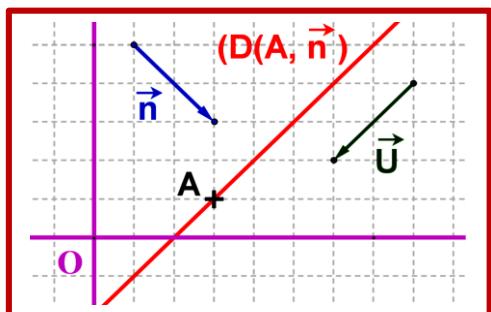
## ٥) أعطِ الخاصية:

## ٠٢. خاصية:

نعتبر في المستوى  $(P)$  مثلث  $ABC$  ومتوازي الأضلاع  $.ABCD$

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right| \text{ مساحة المثلث } ABC \text{ هي: } S_{ABC} \text{ لدينا: } \bullet$$

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \end{pmatrix} \right| \quad \text{لدينا: } S_{ABCD} \quad \text{مساحة متوازي الأضلاع } ABCD \text{ هي:} \quad \bullet$$



**IV. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية) :** **A** **متجهة منتظمة على مستقيم:** vecteur normal:

•  $\vec{n}$  متجهة من المستوى  $(P)$  مستقيم من المستوى  $(P)$ .

ماذا تلاحظ؟

## تعريف: 02

كل متجهة  $\vec{n}$  غير منعدمة من  $(P)$  و متعامدة مع  $\vec{u}$  تسمى متجهة منظمية على المستقيم  $D(A, \vec{u})$  مستقيم من المستوى  $(P)$ .

### ٠٣. ملحوظة :

١.  $\vec{n}$  منظمية على مستقيم  $(D)$  كذلك  $\vec{\alpha} \cdot \vec{n}$  منظمية على  $(D)$  مع  $\alpha \neq 0$

2.  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  منظميتان على (D) إذن  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  مستقيمتان.

الخطوة 3:  $\vec{n}(a, b)$  موجهة لـ  $(D)$  يكافي منظمية على  $(D)$ .

**B.** مجموعه النقط  $M$  من  $(P)$  حيث  $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

نشاط .01

نقطة من  $(P)$  و  $\vec{n}$  متجهة غير منعدمة.

حدد مجموعة النقط  $M(x,y)$  من  $(\mathcal{P})$  حيث  $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

## ٠٢. خاصية:

مجموعه النقاط  $(x, y)$  من المستوى  $(\mathcal{P})$  التي تحقق  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$  هي المستقيم  $D(A, \vec{n})$  المار من  $A$  و  $\vec{n}$  متجهة منتظمة عليه.

• معادلة ديكارتية المستقيم  $D(A, \vec{n})$ .

## ٠١. نشاط :

مستقيم من  $(P)$  حيث يمر من النقطة  $\vec{n}(a, b)$  و  $A(x_A, y_A)$  منظمية عليه. بين أن:

.  $c$  مع تحديد  $ax + by + c = 0$  فإن  $M(x, y) \in D(A, \vec{n})$   $\Omega$

**2** ندرس العكس :  $E$  مجموعة النقط  $(x,y)$  من المستوى  $(P)$  التي تحقق  $ax+by+c=0$  مع  $(a,b) \neq (0,0)$  فإن  $E$  هي

•  $D(A, \vec{n})$  المستقيم

## جواب:

**D** نبین اُن:  $ax+by+c=0$  و نحدد  $c$ :



$$M(x, y) \in D(A, \vec{n}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_A - by_A)$$

خلاصة:  $ax + by + c = 0$  ;  $(c = -ax_A - by_A)$

**2** ندرس العكس :

لدينا  $E$  مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوى  $(P)$  التي تحقق  $(1)$  مع  $(a, b) \neq (0, 0)$   $ax + by + c = 0$  هل هذه المجموعة  $E$  مستقيم  $(D)$  حيث  $\vec{n}(a, b)$  منتظمة على  $(D)$ .

هذه المجموعة  $E$  غير فارغة لأن  $\vec{n}(0, 0) \in E$ . أما إذا افترضنا  $a \neq 0$   $b \neq 0$  نأخذ

نعتبر نقطة  $A(x_A, y_A)$  من  $E$  ومنه:

من خلال فرق  $(1)$  و  $(2)$  نحصل على :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \quad \text{إذن: } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

خلاصة:  $M(x, y)$  نقطة من المستقيم  $(D)$  المار من  $A$  و متجهة منتظمة عليه  $\vec{n}(a, b)$ .

**2** مفردات :

المعادلة  $ax + by + c = 0$  تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم  $D(A, \vec{n})$  المار من  $A(x_A, y_A)$  و متجهة منتظمة عليه  $\vec{n}(a, b)$ .

**3** خاصية و تعريف :

نقطة من المستوى  $(P)$  هي من المستقيم  $D(A, \vec{n})$  إذا و فقط إذا كان  $ax + by + c = 0$  مع  $c = -ax_A - by_A$

. المعادلة  $ax + by + c = 0$  تسمى المعادلة الديكارتية لـ  $D(A, \vec{n})$ .

**4** ملاحظة :

المعادلة الديكارتية  $ax + by + c = 0$  متجهة منتظمة على  $D$  هي  $\vec{n}(a, b)$  و متجهة موجهة له هي  $\vec{u}(-b, a)$ .

**5** تطبيق :

**1** أط المعادلة الديكارتية للمستقيم  $D(A, \vec{n})$  حيث  $A(2, 1)$  و  $B(0, 1)$  و  $C(-2, 3)$ .

**2** نعتبر المثلث  $ABC$  حيث  $A(2, 1)$  و  $B(0, 1)$  و  $C(-2, 3)$ .

أـ حدد معادلة ديكارتية لواسط  $[AB]$  ثم  $[BC]$ .

بـ حدد احداثي  $\Omega$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

جواب :



1. نعطي المعادلة الديكارتية للمستقيم:

بما أن  $\vec{n}(1,5)$  متجهة منتظمة على  $D$  إذن المعادلة هي على شكل:  $0 = 1x + 5y + c$ .

بما أن  $A(2,0) \in (D)$ :  $1 \times 2 + 5 \times 0 + c = 0$  إذن  $c = -2$ .

خلاصة: معادلة ديكارتية هي:  $0 = 1x + 5y - 2$ .

2. معادلة الواسط:

معادلة الواسط  $[AB]$ .

بما أن  $(D)$  واسط  $[AB]$  إذن:  $(D) \perp (AB)$  و  $(D)$  يمر من  $I(1,1)$  منتصف  $[AB]$ .

و منه:  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0$$

$$\therefore (D): x-1 = 0$$

و منه: معادلة الواسط  $[BC]$ .

بما أن  $(D')$  واسط  $[BC]$  إذن:  $(D') \perp (BC)$  و  $(D')$  يمر من  $J(-1,2)$  منتصف  $[BC]$ .

و منه:  $M(x;y) \in (D') \Leftrightarrow \vec{JM} \cdot \vec{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 6 = 0$$

$$\therefore (D'): -x + y - 3 = 0$$

3. ادلة اثباتي:  $\Omega$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  نعلم أن نقطة تلاقي الواسطات لمثلث هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

و منه:  $\Omega(x,y) \in (D) \cap (D')$

$$\therefore \Omega(1,4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

خلاصة:  $\Omega(1,4)$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

ش. شرط تعاون  $(D')$  و  $(D)$ :

ش. نشاط:  $D'(A, \vec{u})$  و  $D'(B, \vec{u})$  مستقيمان من  $(P)$ .

أوجد شرط ضروري و كافي حيث  $(D') \perp (D)$ .

نفس السؤال: ش.  $D'(B, \vec{u})$  و  $D'(A, \vec{u})$  موجهة و منتظمة

خاصية: ش. 02

نعتبر المستقيمين  $\vec{n}(a',b')$  و  $\vec{n}(a,b)$  حيث  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$  و  $(D) : ax + by + c = 0$

منظمتين على  $(D')$  و  $(D)$  على التوالي.  $0 = a'a' + b'b' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$



**01. مثال:** أوجد معادلة ديكارتية لـ  $(D')$  حيث  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$ .

**E.** مسافة نقطة عن مستقيم :

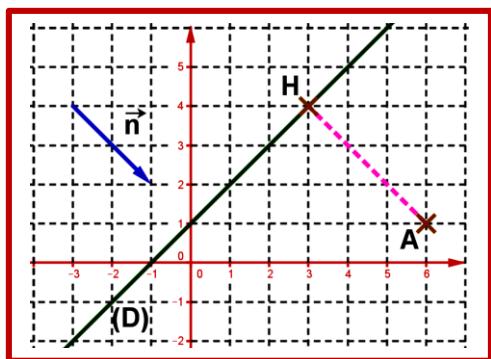
**01. نشاط:**

ما هي أقرب مسافة بين  $A$  و المستقيم  $(D)$ ؟

**02. تعريف:**

$D(A, \vec{u})$  مساقيم من المستوى  $(P)$  و  $A$  نقطة من  $(P)$  حيث  $H$  المسقط العمودي ل  $A$  على  $(D)$ .

المسافة  $AH$  تسمى المسافة النقطة  $A$  عن  $(D)$  ونرمز لها بـ :



**03. نشاط:**

$(D) : ax + by + c = 0$  مساقيم من المستوى  $(P)$ .  $A$  نقطة من  $(P)$  حيث

المسقط العمودي ل  $A$  على  $(D)$ .

**أ - بين أن:**  $c = -ax_H - by_H$

**ب - بين أن:**  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$

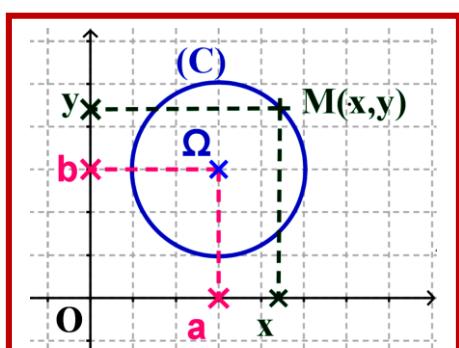
**أ - بين أن:**  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = \|\vec{n}\| |AH|$

**ب - استنتج كتابة**  $AH$  بدلالة  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $x_A$  و  $y_A$

**04. خاصية:**

$$d(A; D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

لدينا  $A$  نقطة من  $(P)$  و  $(D) : ax + by + c = 0$  مساقيم من المستوى



**05. مثال:**

$$d(A; D) = \frac{|-2 + 5 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = 0$$

لدينا:  $A(2, 5)$  و  $(D') : -x + y - 3 = 0$

**V.** الدائرة في المستوى - دراسة تحليلية -

**A.** معادلة ديكارتية لدائرة  $: C(\Omega(a, b); r)$

**01. نشاط:**

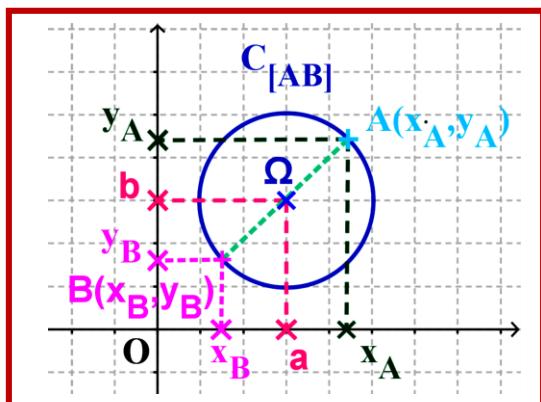
نقطة من  $(P)$  و  $r$  من  $\mathbb{R}^+$ .

أتم التكافؤ الآتي مستعملا  $a$  و  $b$  و  $x$  و  $y$  و  $r$ :

**02. خاصية:**

كل دائرة  $C$  من  $(P)$  لها معادلة ديكارتية على شكل:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  أو أيضاً :

$$c = a^2 + b^2 - r^2 \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$



**مثلاً:** مثال 1 : أوجد معادلة ديكارتية ل  $C(\Omega(0,0);1)$ .

مثلاً 2 : أوجد معادلة ديكارتية ل  $C_{[AB]}$  و  $B(-1;0)$  و  $A(1;0)$ .

**B.** معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها :

**أ. نشاط:**

نقطة من  $C_{[AB]}$  هي الدائرة التي قطراها  $[AB]$  مع  $C_{[AB]} \neq A$  و  $C_{[AB]} \neq B$ .

أوجد شرط ضروري وكافي ل  $(1)$ .

**2. خاصية:**

$C_{[AB]}$  وهي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة التي قطرها  $[AB]$  و نرمز لها ب:

**مثلاً:** مثال 3

أوجد معادلة ديكارتية ل  $B(-1;0)$  و  $A(1;0)$  من  $C_{[AB]}$ .

**جواب:** نجد معادلة ديكارتية ل  $C_{[AB]}$  :

$$M(x; y) \in C_{[A; B]} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

**خلاصة:**  $C_{[AB]}: x^2 + y^2 - 1 = 0$

**C.** الدائرة المارة من 3 نقط غير مستقيمية:

خاصية :

الدائرة المارة من ثلاثة نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمية هي الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  حيث مركزها  $\Omega$  تلاقي واسطاته وشعاعها هو  $r = \Omega A$ .

**D.** تمثيل بارا متري لدائرة :

**أ. نشاط :**

دائرة من المستوى  $C(\Omega(a,b);r)$  منسوب إلى معلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $(\vec{i}, \vec{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$ .

أحسب  $\vec{J} \cdot \vec{\Omega M}$  ;  $\vec{i} \cdot \vec{\Omega M}$  ;  $\vec{J}$ .

**2.** ما هي إحداثياتي  $M$  بالنسبة للمعلم  $(\vec{\Omega}; \vec{i}; \vec{j})$ .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} \text{ بين: } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \\ & \text{من خلال: } \end{aligned} \quad (3)$$

**2. خاصية:**

دائرة من المستوى  $C(\Omega(a,b);r)$  منسوب إلى معلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $(\vec{i}, \vec{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$ .

لدينا لكل  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  نقطة من  $C(\Omega(a,b);r)$ :

وهي تسمى تمثيل بارا متري للدائرة  $C(\Omega(a,b);r)$ .



## مثلاً: ٠٣

أعط تمثيل بارا متري للدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم  $(O, i, j)$ .

دراسة مجموعة النقط:  $\{M(x, y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$

## نشاط: ٠١

أوجد مجموعة النقط  $M(x, y)$  من  $(P)$  التي تحقق ما سبق.

أعط الخاصية: ٢

## خاصية: ٠٢

مجموعة النقط  $M(x, y)$  من  $(P)$  التي تتحقق:  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  هي

$S = \emptyset$  ليس هناك نقطة  $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$

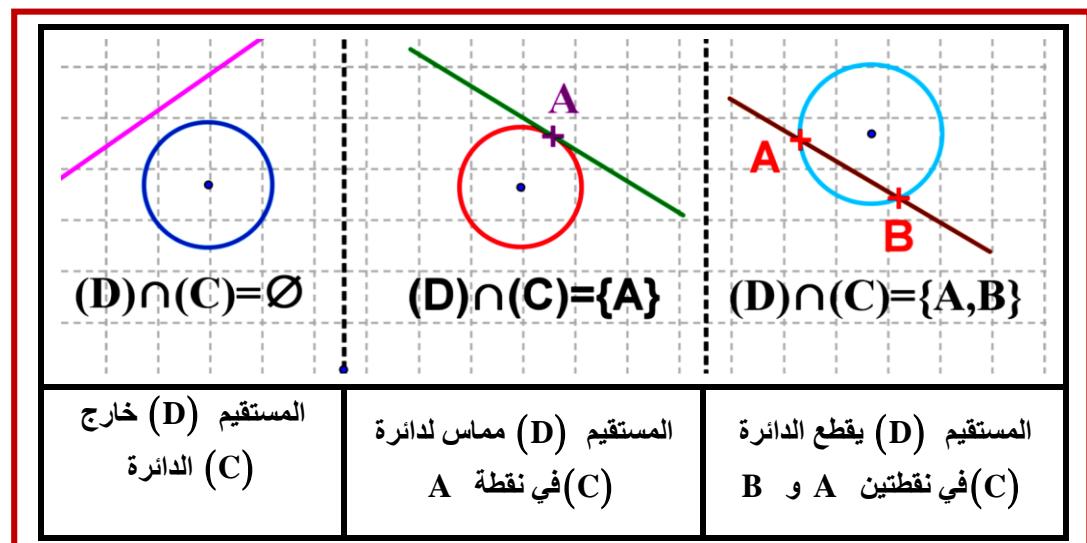
$S = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$  أو مجموعة الحلول هي  $\Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$  هي النقطة  $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$

$S = (C) = C \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \right)$  مجموعة الحلول هي الدائرة  $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$

## دراسة الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم: ٠٤

## نشاط: ٠١

أرسم الأوضاع النسبية لـ  $(D)$  و  $(C)$  ثم أعط التعريف والخصائص.



## تعريف وخصائص: ٠٢

$(D)$  مستقيم من المستوى  $(P)$  و  $(C)$  دائرة من المستوى  $\Omega$ . مركز الدائرة و  $r$  شعاعها.

١.  $(D)$  هو خارج الدائرة  $(C)$  يعني  $D$  و  $(C)$  ليس لهما نقطة مشتركة  $(D) \cap (C) = \emptyset$ .

خاصية:  $(D)$  هو خارج الدائرة  $(C)$  يكفي  $d(\Omega, (D)) > r$

٢.  $(D)$  و  $(C)$  يتقاطعان يعني  $(D) \cap (C) = \{A, B\}$  و  $(C)$  لهما نقطتين مشتركتين  $A$  و  $B$ .



- خاصية:  $(D) \cap (C) = \{A\}$  يعني  $(D) \cap (C) = \{A\}$  لهما نقطة مشتركة هي  $A$ .  
 $d(\Omega, (D)) = r$  يكافي  $(D)$  مماس ل  $(C)$  في  $A$  يكافي  $d(\Omega, (D)) = r$  مماس ل  $(C)$  في  $A$

**H** معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة:

**01. نشاط:**

نعتبر المستقيم  $D(A; \vec{u})$  المماس ل  $C(\Omega, r)$  في  $A$  حيث  $A$  من  $(C)$ .  
 (أنظر الشكل)

**1** أوجد الشرط الضروري والكافي حيث نقطة  $M(x, y)$  تتبع  $D(A; \vec{u})$

**2** استنتج معادلة  $D(A; \vec{u})$  المماس ل  $C(\Omega, r)$  في  $A$

**3** أعط الخاصية.

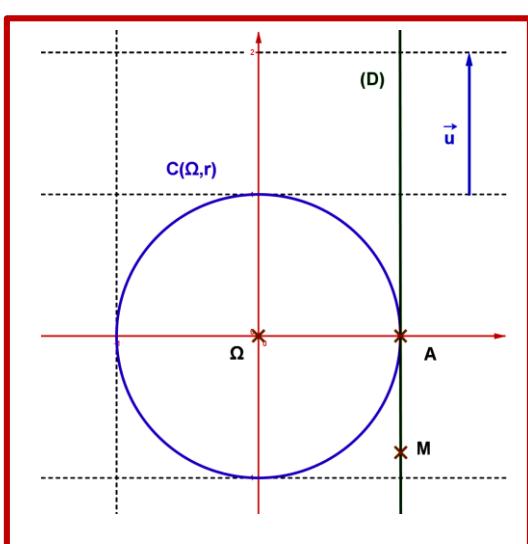
**02. خاصية المعادلة الديكارتية للمماس في نقطة من  $(C)$ :**

معادلة ديكارتية للمماس  $D(A; \vec{u})$  للدائرة  $C(\Omega(a; b); r)$  في  $A(x_A, y_A)$  هي  $\vec{OA} \cdot \vec{u} = 0$  أي  $\vec{OA} \cdot \vec{u} = 0$  من الدائرة  $(C)$

**03. مثال:**

أنظر الشكل.

**1.** أعط المعادلة الديكارتية ل  $(D)$ . بطريقة مبيانية.



**VI.** مجموعة النقط  $M$  من المستوى حيث:  $MA^2 - MB^2 = k$  ثم  $MA^2 + MB^2 = k$  ثم  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$  ثم  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = k$   $k \in \mathbb{R}$

حالة 1:  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{MA} \cdot \vec{u} = k$  (أو  $\vec{MA} \cdot \vec{u} = 0$ )

و  $A$  و  $B$  نقطتان من المستوى  $(P)$  حيث:  $AB = 6$  و  $I$  منتصف  $[AB]$ .

**1.** حدد  $(E_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = 0$

**2.** حدد  $(E_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -12$

**3.** حدد  $(E_3)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 18$



حالة 2:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

- 1. حدد  $(F_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
- 2. حدد  $(F_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$
- 3. حدد  $(F_3)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -9$
- 4. حدد  $(F_4)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -10$

حالة 3:  $MA^2 + MB^2 = k$

- 1. حدد  $(G_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 + MB^2 = 68$
- 2. حدد  $(G_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 + MB^2 = 18$
- 3. حدد  $(G_3)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 + MB^2 = 4$

حالة 4:  $MA^2 - MB^2 = k$

- 1. حدد  $(H_1)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 - MB^2 = 0$
- 2. حدد  $(H_2)$  مجموعة النقط  $M$  من  $(P)$  حيث:  $MA^2 - MB^2 = 36$

**ملاحظة:** يمكنك أن تحدد مجموعة النقط السابقة للحالات الأربع بصفة عامة أي أخذ  $k \in \mathbb{R}$  و  $AB$  وتناقش بفصل الحالات.