

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المرجع حلول مقترحة	سلسلة 3
تمرين 1: $ABCD$ رباعي محدب. E و F هما على التوالي مركزا ثقلي المثلثين ABC و ADC		
لدينا E مركز ثقل المثلث ABC أي مرجع النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجع: $(*) \forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MC}$	لدينا F مركز ثقل المثلث ADC أي مرجع النقط $(A,1)$ و $(D,1)$ و $(C,1)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجع: $(*) \forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MC}$	
نأخذ في المتساوية $(*)$: $M = E$ فنجد أن: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC})$ وبما أن E مرجع النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ فإن: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ أي: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DE}$ منه: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$ بالتالي: $(EF) \parallel (BD)$		
الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.		
تمرين 2: ABC مثلث. E و I و F نقط حيث $\overrightarrow{AE} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$ و I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9} \overrightarrow{CA}$		
1	لدينا $\overrightarrow{AE} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$ منه: $5 \overrightarrow{AE} = -2 \overrightarrow{AB}$ منه: $5 \overrightarrow{AE} + 2 \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ منه: $5 \overrightarrow{AE} + 2 (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \vec{0}$ منه: $5 \overrightarrow{AE} + 2 \overrightarrow{AE} + 2 \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ منه: $7 \overrightarrow{AE} + 2 \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ منه: $-7 \overrightarrow{EA} + 2 \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ هذا يعني أن E مرجع النقطتين $(A,-7)$ و $(B,2)$ لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرجع النقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$ لدينا $\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9} \overrightarrow{CA}$ منه: $9 \overrightarrow{CF} = 7 \overrightarrow{CA}$ منه: $9 \overrightarrow{CF} - 7 \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ منه: $9 \overrightarrow{CF} - 7 (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FA}) = \vec{0}$ منه: $9 \overrightarrow{CF} - 7 \overrightarrow{CF} - 7 \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ منه: $2 \overrightarrow{CF} - 7 \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ منه: $-2 \overrightarrow{FC} - 7 \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ هذا يعني أن E مرجع النقطتين $(C,-2)$ و $(A,-7)$ (أو أيضا $(C,2)$ و $(A,7)$ خاصية الصمود)	
2	لدينا E مرجع $(A,-7)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجع: $\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = -\frac{7}{5} \overrightarrow{MA} + \frac{2}{5} \overrightarrow{MB}$ لدينا F مرجع $(C,2)$ و $(A,7)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجع: $\forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{2}{9} \overrightarrow{MC} + \frac{7}{9} \overrightarrow{MA}$ نأخذ: $M = I$ فنجد أن: $\overrightarrow{IE} = \frac{7}{5} \overrightarrow{IA} - \frac{2}{5} \overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{9} \overrightarrow{IC} + \frac{7}{9} \overrightarrow{IA}$ ولدينا I منتصف $[BC]$ منه: $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$ منه: $\overrightarrow{IF} = \frac{-2}{9} \overrightarrow{IB} + \frac{7}{9} \overrightarrow{IA}$ إذن: $9 \overrightarrow{IF} = -2 \overrightarrow{IB} + 7 \overrightarrow{IA}$ و $5 \overrightarrow{IE} = 7 \overrightarrow{IA} - 2 \overrightarrow{IB}$ منه: $9 \overrightarrow{IF} = 5 \overrightarrow{IE}$ أي $\overrightarrow{IF} = \frac{5}{9} \overrightarrow{IE}$ بالتالي: النقط E و I و F مستقيمية.	
تمرين 3: $A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$. E منتصف $[BC]$ و G مرجع النقطتين $(E,2)$ و $(A,1)$		
1	لدينا E منتصف $[BC]$ منه: $\begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3}{2} \\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ منه: $E\left(\frac{3}{2}; 2\right)$	

لدينا: G مرجح $(E, 2)$ و $(A, 1)$ منه :

$$G\left(2; \frac{8}{3}\right) : \text{منه} \begin{cases} x_G = \frac{2x_E + x_A}{3} = \frac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{2y_E + y_A}{3} = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

لدينا: $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ و $\overrightarrow{OG}\left(2; \frac{8}{3}\right)$ ولدينا :

$$\det(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OE}) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} = 4 - 4 = 0$$

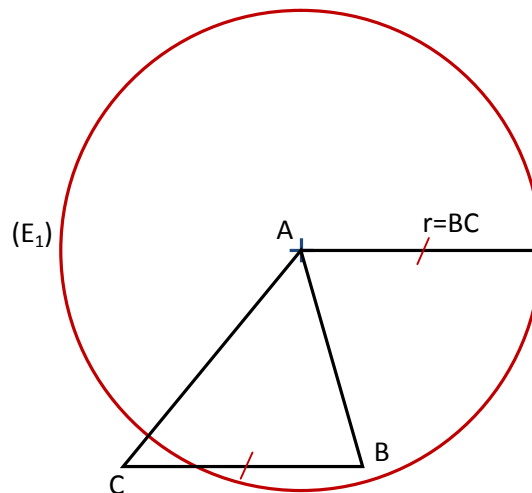
بالتالي: O و G و C مستقيمية.

تذكير: إحداثيات مرجح (A, a) و (B, b) و ... و (K, l) هي :

$$\begin{cases} x_G = \frac{a x_A + b x_B + \dots + l x_K}{a + b + \dots + l} \\ y_G = \frac{a y_A + b y_B + \dots + l y_K}{a + b + \dots + l} \end{cases}$$

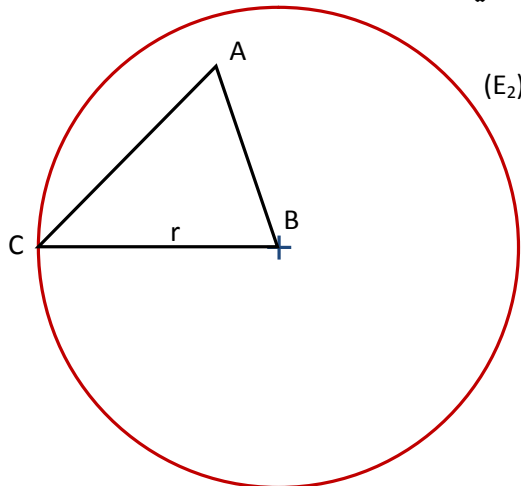
تمرين 4 : ABC مثلث.

لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$
 لدينا : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$



1

لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$
 لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ منه : $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ أي : $BM = BC$
 بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$

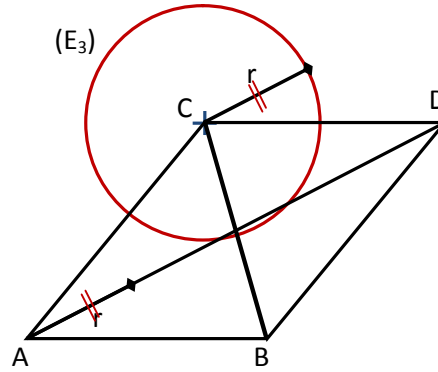


2

لنحدد (E_3) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{4CM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$
 نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (أي $ABDC$ متوازي أضلاع)

3

منه : $\|4\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$ أي : $4CM = AD$ أي : $CM = \frac{AD}{4}$
 بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C وشعاعها $R = \frac{AD}{4}$



تمرين 5 : مثلث ABC ، $AB = 6$ ، $AC = 4$ ، $BC = 5$. مركز ثقل المثلث ABC .

1 لنحدد (z) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$
 نعتبر النقطة G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي مركز ثقل المثلث ABC)
 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P) 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
 منه : $\|3\overrightarrow{MG}\| = 6$ أي $3MG = 6$ أي $MG = 2$
 بالتالي (z) هي الدائرة التي مركزها G وشعاعها $r = 2$

2 لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$
 نعتبر النقطة I مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ (أي منتصف $[AB]$)
 والنقطة J مرجح النقط $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي منتصف $[BC]$)
 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P) 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ و $\forall M \in (P) 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
 منه : $\|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|$ أي $2MI = 2MJ$ أي $MI = MJ$
 بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$

3 لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
 نعتبر النقطة G مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,3)$
 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P) 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$
 منه : $\|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}\|$ أي $\|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ أي $4MG = \frac{BC}{2}$
 بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G وشعاعها $r = \frac{BC}{2}$

لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق.
 لا حظ أننا ستعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن وفي حال كان مجموع المعاملات منعما (كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)