السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال العددية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{4\lvert x\rvert+3}{x^2+4x+4}$	$Df=\{x\in IR\ /\ \ x^2+4x+4\neq 0\}=\{x\in IR\ /\ \ (x+2)^2\neq 0\}$ $Df=\{x\in IR\ /\ \ x+2\neq 0\}=\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$
$g(x)=\dfrac{x^3-5}{2\lvert x-3\rvert-8}$	$Dg=\{x\in IR\ /\ \ 2\lvert x-3\rvert-8\neq 0\}$ $Dg=\{x\in IR\ /\ \ \lvert x-3\rvert\neq 4\}=\{x\in IR\ /\ \ x-3\neq 4\ \ et\ \ x-3\neq -4\}$ $Dg=\{x\in IR\ /\ \ x\neq 7\ \ et\ \ x\neq -1\}=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]-1;7\right[\cup\left]7;+\infty\right[$
$h(x)=\dfrac{6+x^4}{x-\dfrac{1}{x}}$	$Dh=\left\{x\in IR/\ x\neq 0\ et\ x-\dfrac{1}{x}\neq 0\right\}=\left\{x\in IR/\ x\neq 0\ et\ \dfrac{x^2-1}{x}\neq 0\right\}$ $Dh=\{x\in IR\ /\ x\neq 0\ et\ (x-1)(x+1)\neq 0\}$ $Dh=\{x\in IR/\ x\neq 0\ et\ \ x\neq -1\ \ et\ \ \ x\neq 1\}$ $Dh=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$
$p(x)=\dfrac{5-\lvert x\rvert}{\lvert x\rvert+7}$	$Dp=\{x\in IR/\ \lvert x\rvert+7\neq 0\}=IR$ (بما أن : $\forall x\in IR/\ \lvert x\rvert+7\geq 7>0$)
$q(x)=\dfrac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6}$	$Dq=\{x\in IR/\ x^2+x-6\neq 0\}$ ولدينا: $\Delta=1+24=25\ \Rightarrow x_1=\dfrac{-1+5}{2}=2\ \ et\ \ x_2=\dfrac{-1-5}{2}=-3$ إذن : $Dq=\left]-\infty\,;-3\right[\cup\left]-3;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$
$k(x)=\dfrac{5-\lvert x\rvert}{x^2-3x+4}$	$Dk=\{x\in IR/\ x^2-3x+4\neq 0\}$ ولدينا: $\Delta=9-16=-7<0\ \ \Rightarrow\ \forall x\in IR\ x^2-3x+4>0$ إذن: $Dk=IR$
$t(x)=\dfrac{5-\sin(x)}{2\sin(x)-1}$	$Dt=\{x\in IR/\ \ 2\sin(x)-1\neq 0\}=\left\{x\in IR/\sin(x)\neq\dfrac{1}{2}\right\}=$ $Dt=\left\{x\in IR/\sin(x)\neq\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ $Dt=\left\{x\in IR/\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\right\}$ $Dt=\left\{x\in IR/\ x\neq\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z\right\}$ $Dt=IR_{\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in Z\right\}}$
$m(x)=\sqrt{3-\lvert x-4\rvert}$	$Dm=\{x\in IR/\ \ 3-\lvert x-4\rvert\geq 0\}=\{x\in IR/\lvert x-4\rvert\leq 3\}=\{x\in IR/-3\leq x-4\leq 3\}$ $Dm=\{x\in IR/1\leq x\leq 7\}=[1;7]$
$r(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$	$Dr=\{x\in IR/\ \ x\geq 0\ \ et\ \ x^2+x-2\geq 0\}$ لدينا : $\Delta=1+8=9>0$ منه : $x_1=1$ و $x_2=-2$ منه : $\left(x^2+x-2\geq 0\ \Leftrightarrow\ (x-1)(x+2)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right[\right)$ بالتالي : $Dr=\left[0;+\infty\right[\cap\left]-\infty\,;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right[=\left[1;+\infty\right[$

لحل المتراجحة الثانية قمنا بتحديد جذور الحدودية x^2+x-2 و بعد استعمال جدول الإشارات وجدنا المجموعة: $\left]-\infty\,;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ ، و لكون شرط صلاحية التعبير يتضمن العطف "و" فلنتيجة النهائية عبارة عن تقاطع مجالين.

$l(x)=\sqrt{x^3-8}+\dfrac{1-x}{\lvert x+1\rvert-\lvert x-7\rvert}$	$Dl=\{x\in IR/\ \ x^3-8\geq 0\ \ et\ \ \lvert x+1\rvert-\lvert x-7\rvert\neq 0\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x^3\geq 8\ \ et\ \ \lvert x+1\rvert\neq\lvert x-7\rvert\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x\geq 2\ \ et\ \ x+1\neq x-7\ \ et\ \ x+1\neq -x+7\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x\geq 2\ \ et\ \ 1\neq -7\ \ et\ \ x\neq 3\}$ $Dl=\{x\in IR/\ \ x\geq 2\ \ et\ \ x\neq 3\}=[2;3[\cup]3;+\infty[$

تذكر الخاصية: $x\geq y \Leftrightarrow x^n\geq y^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي فردي، أما إذا كان n زوجيا فالتكافؤ السابق غير صحيح إلا إذا كان x و y موجبان.

تمرين 2 : ادرس زوجية الدوال التالية :

$f(x)=\dfrac{x^3}{\lvert x\rvert+5}$	لدينا: $Df=\{x\in IR/\ \ \lvert x\rvert+5\neq 0\}=IR$ (لأن: $\forall x\in IR\ \ \lvert x\rvert+5\geq 5>0$) منه: $x\in Df\Rightarrow -x\in Df$ من جهة أخرى، لدينا: $\forall x\in IR\ \ f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{\lvert -x\rvert+5}=\dfrac{-x^3}{\lvert x\rvert+5}=-f(x)$ بالتالي : f دالة فردية.
$g(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}$	لدينا: $Dg=\{x\in IR/\ \ x^4+x^2+1\neq 0\}=IR$ (لأن: $\forall x\in IR\ \ x^4+x^2+1\geq 1>0$) من جهة أخرى، لدينا: $\forall x\in IR\ g(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{(-x)^4+(-x)^2+1}=\dfrac{\cos(x)}{x^4+x^2+1}=g(x)$ بالتالي : g دالة زوجية.
$h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^3-1}$	$Dh=\{x\in IR/\ \ x^3\neq 1\}=\{x\in IR/\ \ x\neq 1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بما أن : $-1\in Dr$ و $1\notin Dr$ فإن h ليست دالة زوجية و لا فردية. عدم صحة الشرط $x\in Dh\Rightarrow -x\notin Dh$ ينفي مباشرة زوجية و فردية الدالة.
$p(x)=\lvert x\rvert+\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$	$Dp=IR$ $\forall x\in IR\ \ \ p(-x)=\lvert -x\rvert+\lvert -x+1\rvert+\lvert -x-1\rvert=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert=p(x)$ بالتالي p دالة زوجية.
$q(x)=x^2+x+1$	$Dq=IR$ لدينا : $q(1)=3$ و $q(-1)=1$ منه : $q(-1)\neq q(1)$ و $q(-1)\neq -q(1)$ بالتالي فإن q ليست دالة زوجية و لا فردية. إثبات عدم زوجية دالة يجب أن يكون باستعمال مثال مضاد ، حيث أن نفي العبارة : $\forall x\in Dq\ \ q(-x)=q(x)$ هو $\exists x\in Dq\ \ q(-x)\neq q(x)$ و هو ما يعني إيجاد مثال يحقق هذه العبارة الأخيرة و نفس الشيء بالنسبة لنفي الفردية.
$k(x)=\dfrac{\sqrt{\lvert x-2\rvert}+\sqrt{\lvert x+2\rvert}}{x^4-1}$	$Dk=\{x\in IR/\ \ x^4-1\neq 0\}=\{x\in IR/\ \ (x-1)(x+1)(x^2+1)\neq 0\}$ $Dk=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ منه : $x\in Dk\Rightarrow -x\in Dk$ و $\forall x\in IR\ \ \ k(-x)=k(x)$ بالتالي فإن q دالة زوجية .

تمرين 3 : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1	لدينا: $\forall x\in IR\ \ x^2+2x+2=(x-1)^2+1>0$
2	$Df=\{x\in IR/x^2+2x+2\neq 0\}=IR$ (لأن الشرط $x^2+2x+2\neq 0$ محقق لكل عدد حقيقي حسب السؤال السابق)
3	لدينا: $\forall x\in IR\ \ f(x)-1=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\geq 0$

و $\forall x \in IR \quad f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 2 = \frac{-1}{x^2 + 2x + 2} < 0$ ، بالتالي: $\boxed{\forall x \in IR \quad 1 \leq f(x) < 2}$

تمرين اعتيادي و بسيط بالنسبة لشعبة العلوم الرياضية، لكنه من بين التمارين المدرجة للتذكير ببعض القواعد

تمرين 4 :

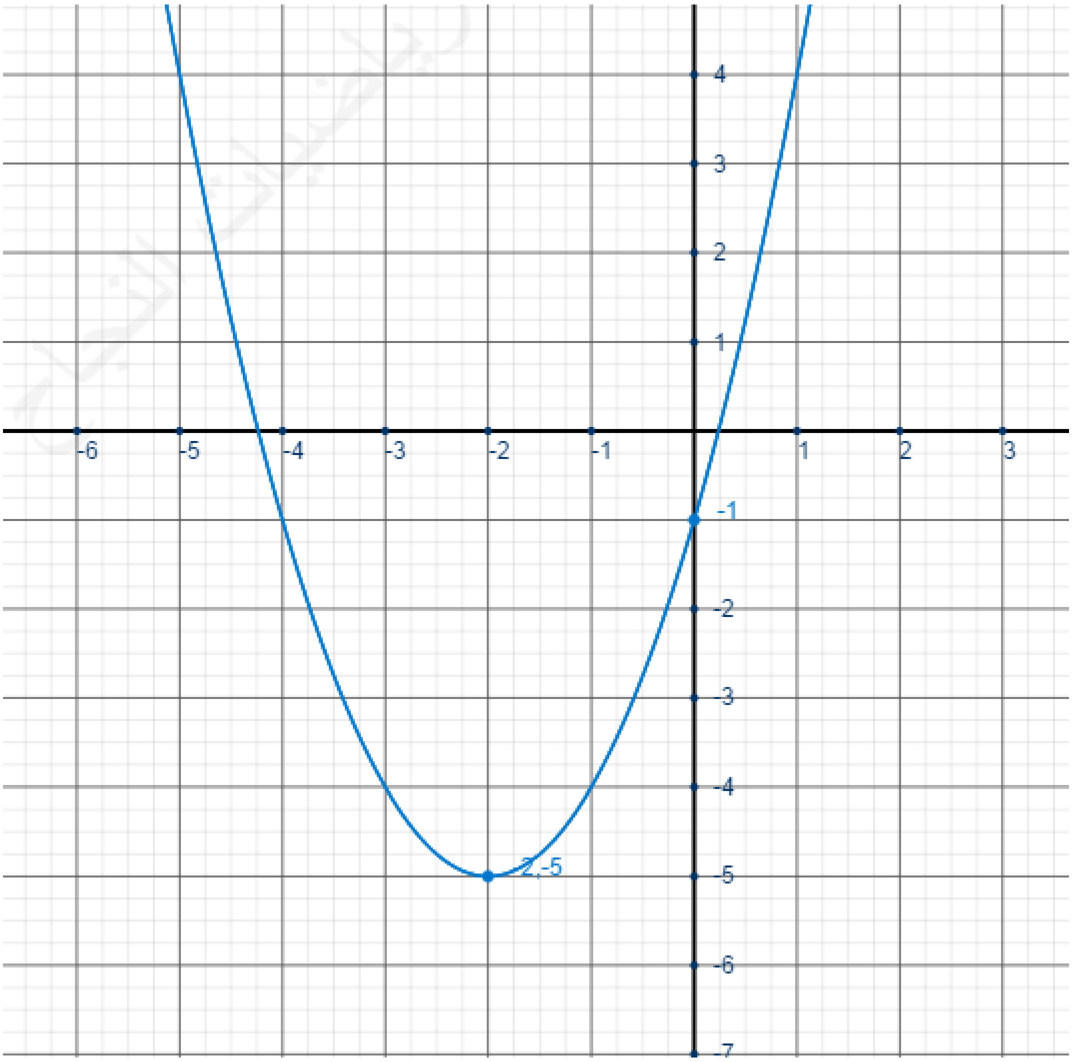
$\boxed{f(x) = x^2 + 4x - 1}$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

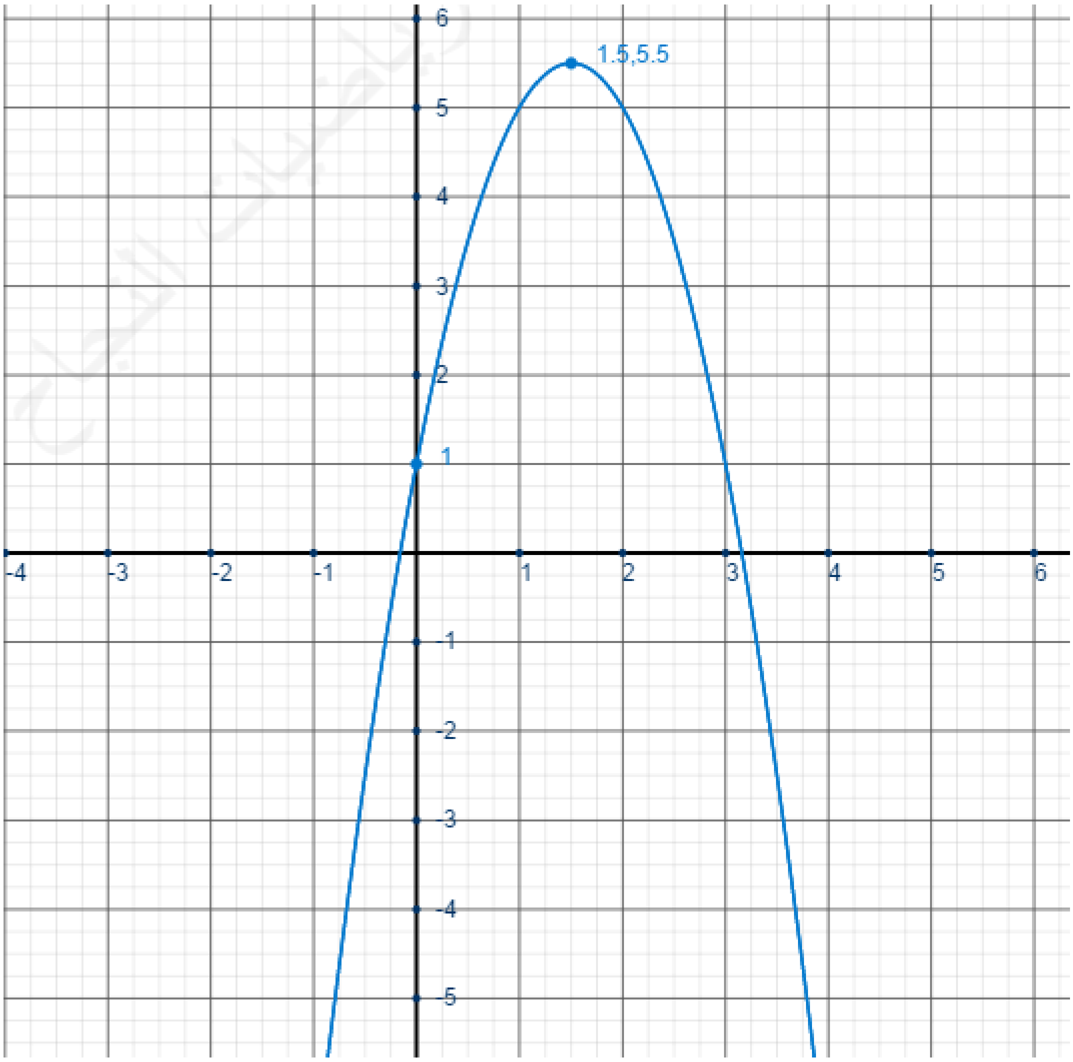


$\boxed{g(x) = -2x^2 + 6x + 1}$

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

إذن :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$



لاحظ أن رتابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

$$\boxed{h(x)=\frac{3x-1}{x-2}}$$

h عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

و لدينا :

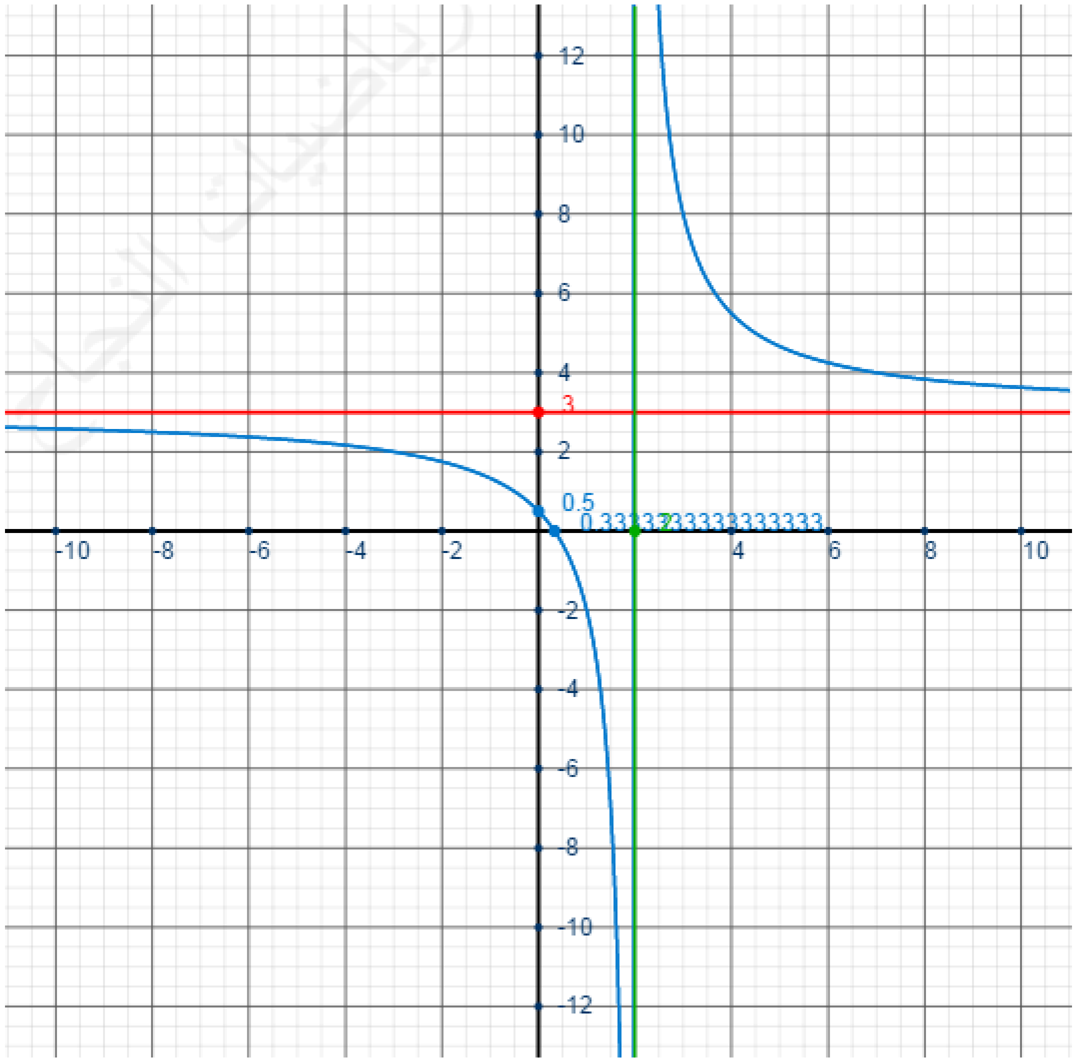
$$h(x)-3=\frac{3x-1}{x-2}-3$$

$$h(x)-3=\frac{3x-1-3x+6}{x-2}$$

$$h(x)-3=\frac{5}{x-2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(2,3)$ و بما أن $5>0$ فالدالة تناقصية

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$



$\boxed{k(x)=\frac{x}{x+2}}$

k عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

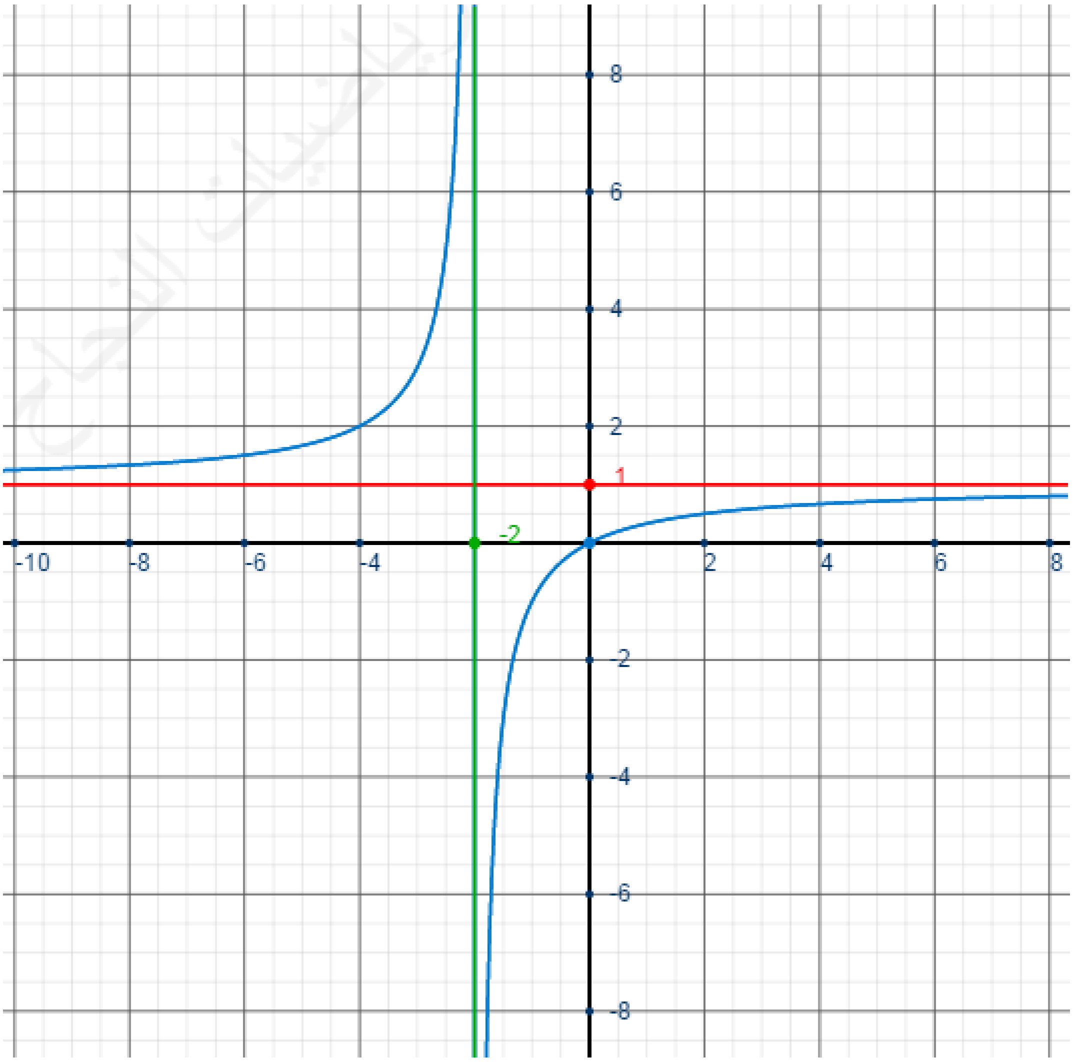
$$k(x)-1=\frac{x}{x+2}-1$$

و لدينا : $k(x)-1==\frac{x-x-2}{x+2}$

$$k(x)-1==\frac{-2}{x+2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(-2,1)$ و بما أن $-2<0$ فالدالة تزايدية

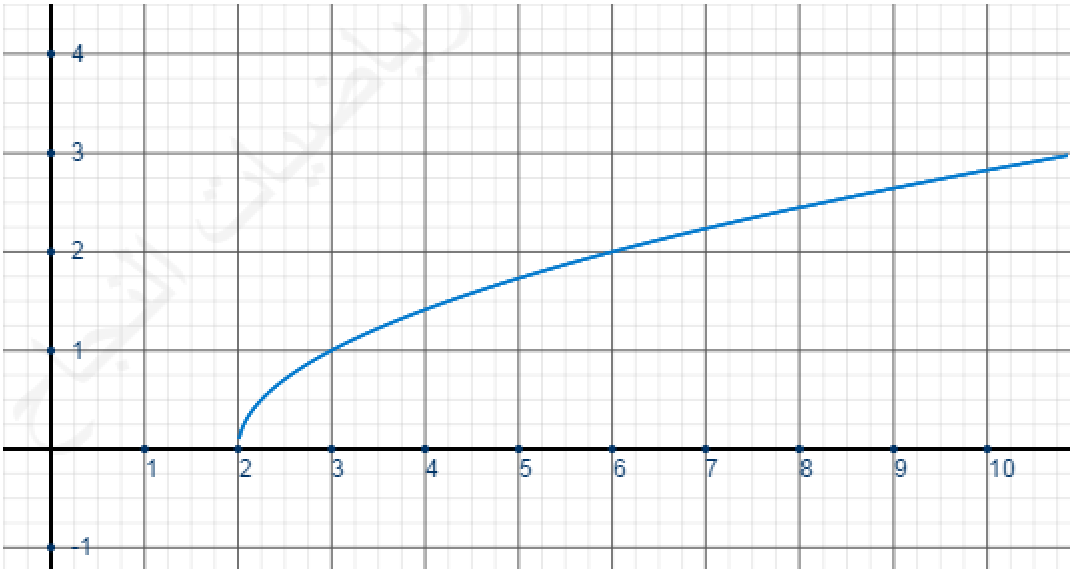
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$k(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$



لاحظ أنه لتحديد مركز الهذلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}$

$p(x)=\sqrt{x-2}$	p عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :	

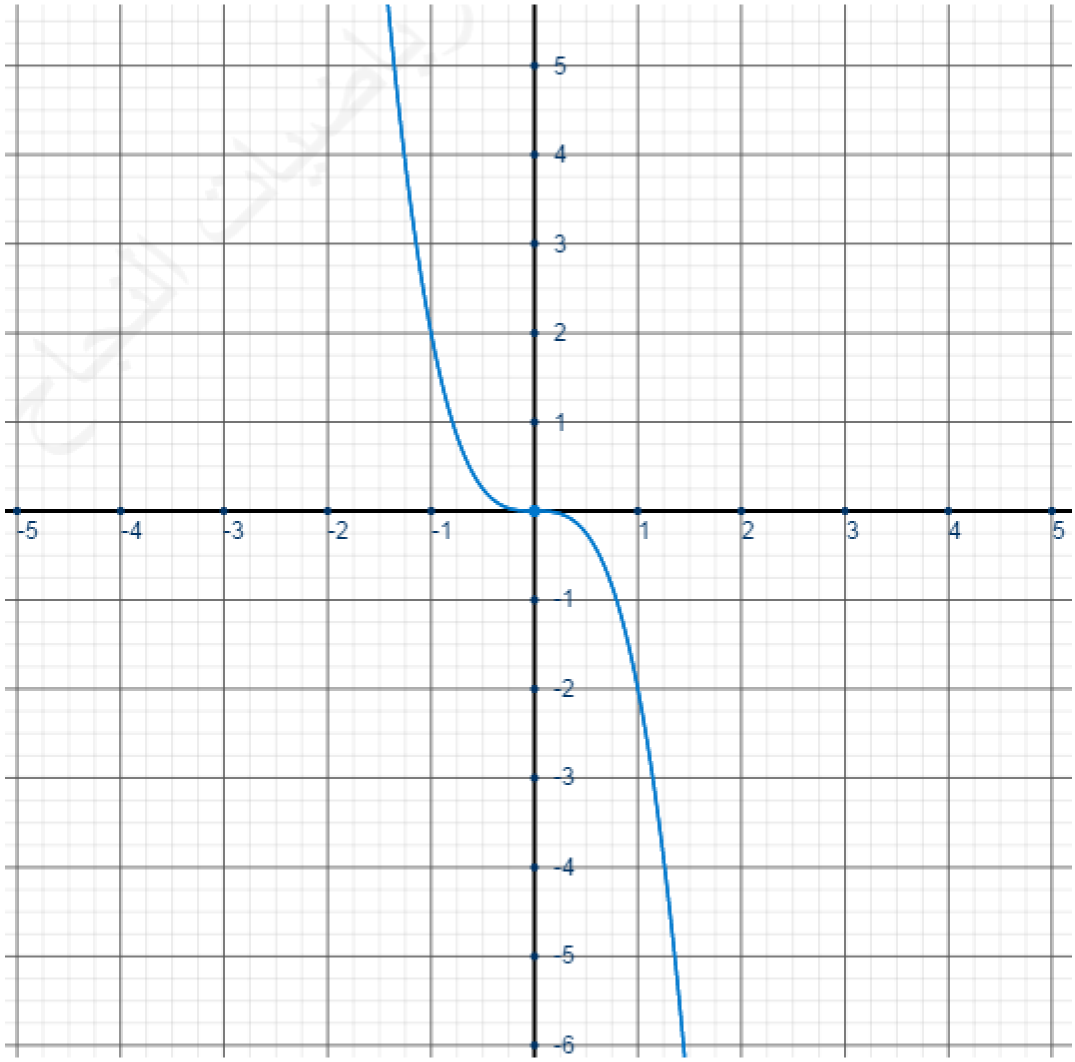
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$		0	↗



$q(x) = -2x^3$

q عبارة عن دالة على شكل $a\,x^3$ و بما أن $a = -2 < 0$ ، فإن :

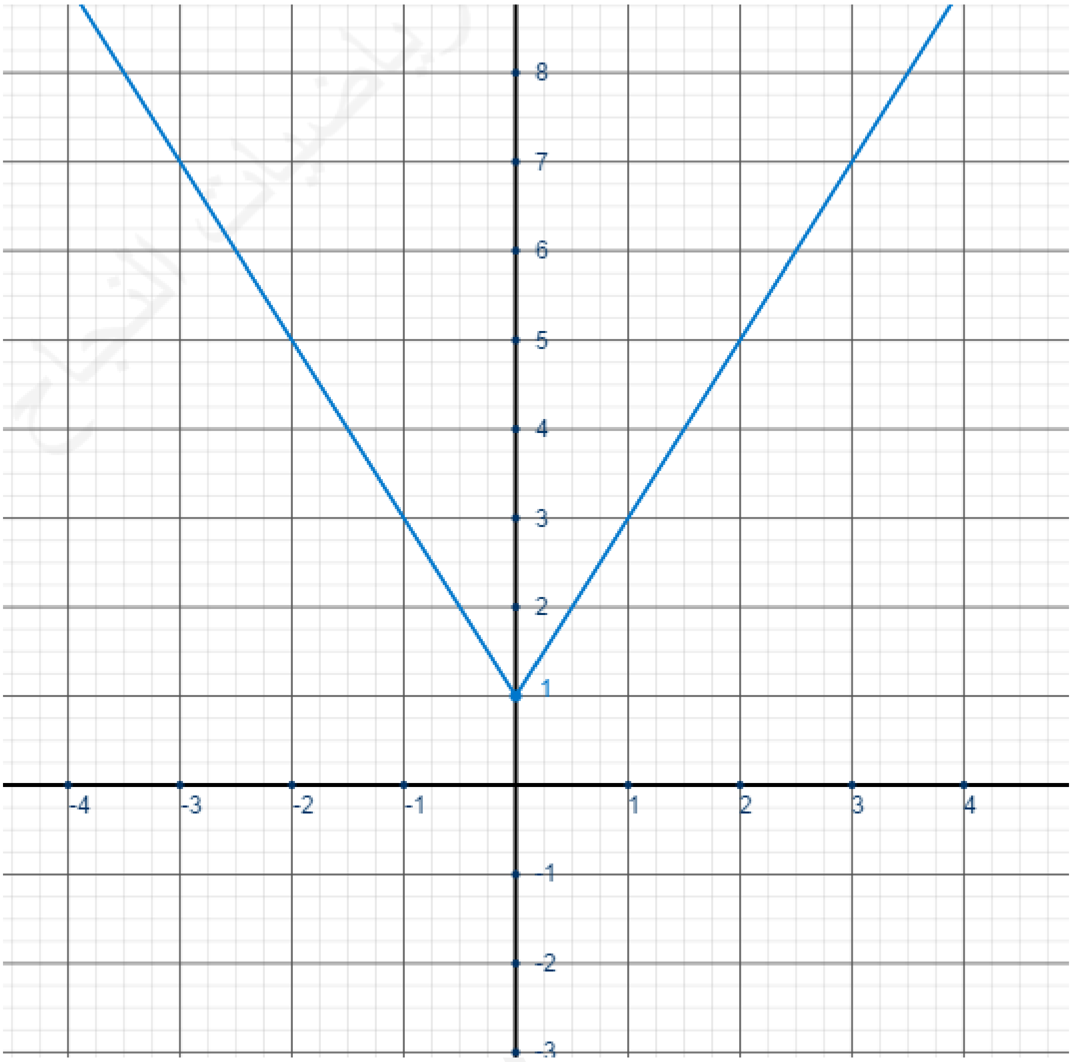
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘



$m(x) = 2\,|\,x\,| + 1$

نبين بسهولة أن m دالة زوجية و أن قصورها على $[0;+\infty[$ ($\forall x \in [0;+\infty[\;\; m(x) = 2x+1$) هو دالة تآلفية أي تمثيلها المبياني على هذا المجال سيكون نصف مستقيم، و باستعمال الزوجية نجد:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$m(x)$	↘	1	↗



للتذكير نحتاج بالطبع لحساب صورة عددين (في الشكل أعلاه : $m(0)=1$ و $m(1)=3$)

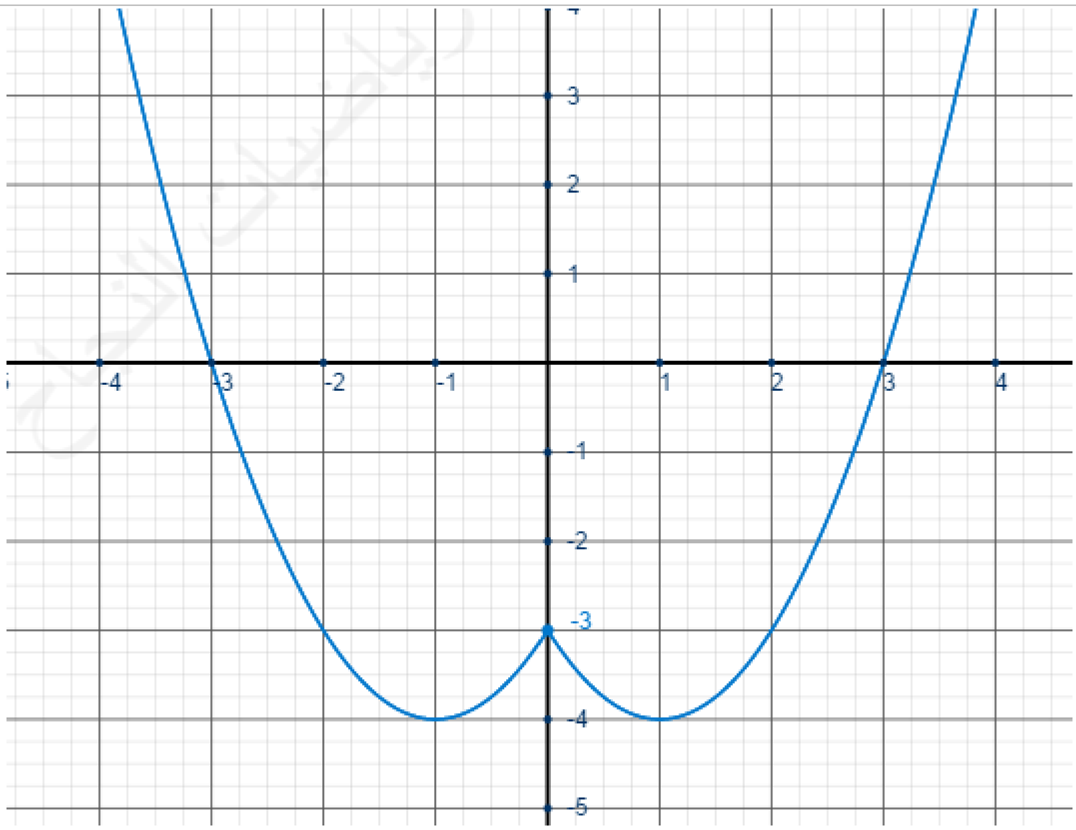
نبين بسهولة أن t دالة زوجية و أن قصورها على $[0;+\infty[$

($\forall x\in[0;+\infty[\quad t(x)=x^2-2x-3$) هو دالة حدودية من الدرجة الثانية أي تمثيلها

المبياني على هذا المجال سيكون جزءا من شلجم، و باستعمال الزوجية نجد:

$\boxed{t(x)=x^2-2|x|-3}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$t(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	



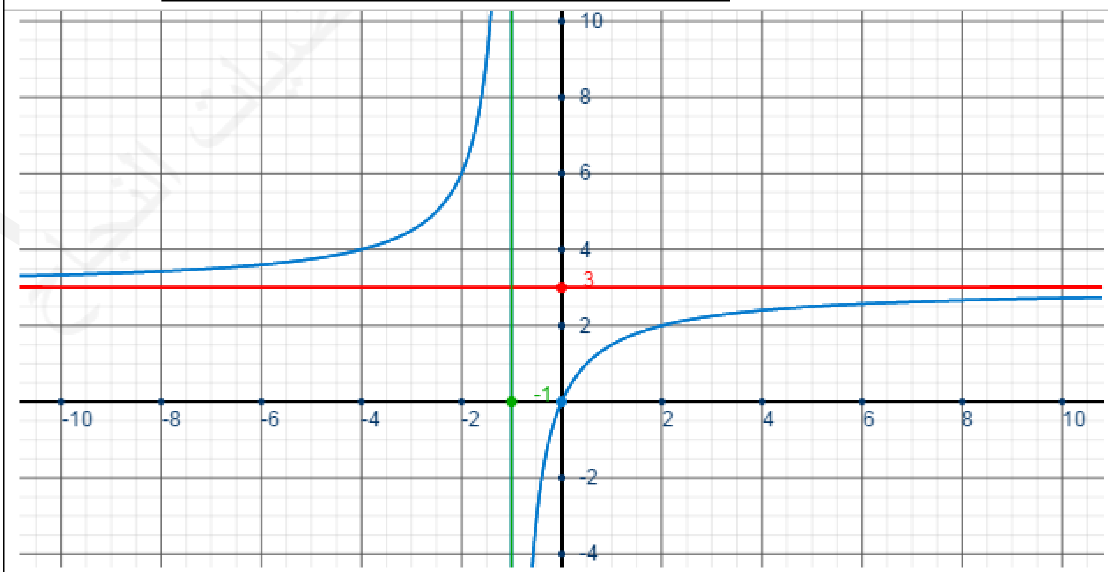
إذا كانت دالة ما زوجية أو فردية فيكفي دراستها على $[0;+\infty[$ لاستنتاج منحناها على كل المجموعة IR

$r(x)=\dfrac{3x}{|x|+1}$

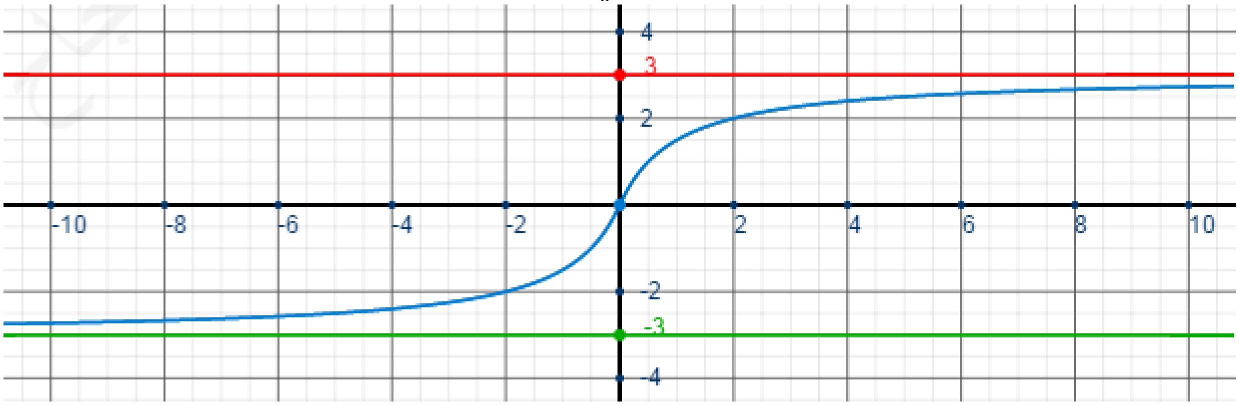
نبين بسهولة أن r دالة فردية و أن قصورها على $[0;+\infty[$
$\left(\forall x\in[0;+\infty[\ \ r(x)=\dfrac{3x}{x+1}\right)$ هو خارج حدانيتين أي أن تمثيلها المبياني على هذا المجال
سيكون جزء من هذلول و باستعمال الزوجية نجد: (بعد إنجاز جدول التغيرات الدالة
$x\mapsto\dfrac{3x}{x+1}$ نحتفظ بالجزء الذي يتضمن المجال $[0;+\infty[$ و لكون الدالة فردية
سيكون لها نفس الرتابة على $]-\infty;0]$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$r(x)$	↗	0	↗

التمثيل المبياني للدالة $x\mapsto\dfrac{3x}{x+1}$



التمثيل المبياني للدلة $r(x)$



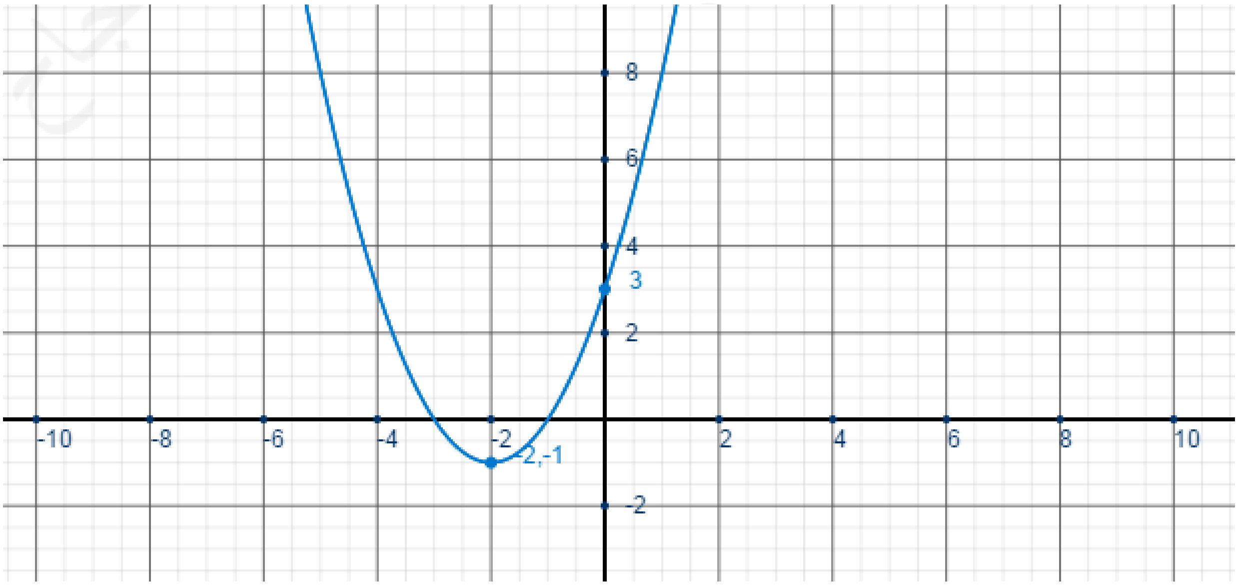
تم إدراج التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto \frac{3x}{x+1}$ فقط لأجل توضيح طريقة إنشاء التمثيل المبياني للدالة $r(x)$

تمرين 5 : $f(x) = x^2 + 4x + 3$

1 f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن جدول تغيراتها ($\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$)

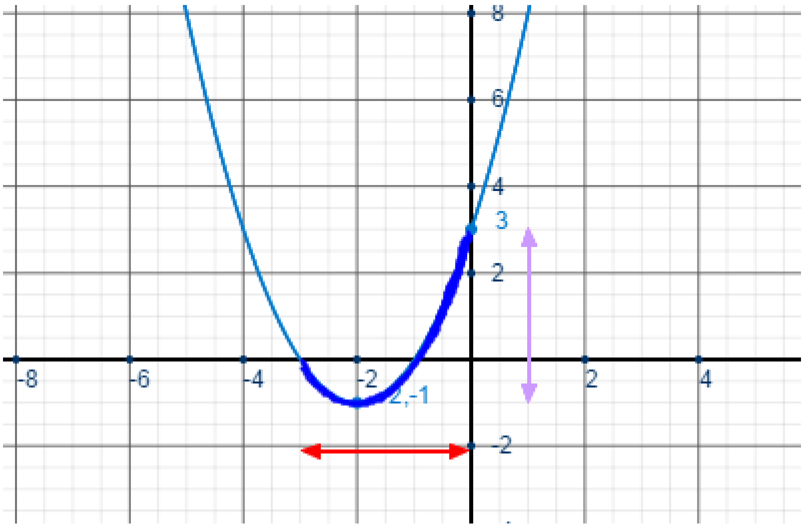
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

2



3

مبيانيا نجد: $f([-3,0]) = [-1;3]$



4

أ) لدينا $f(x)=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$ $\quad \forall x\in IR$

ب) لدينا من جهة :

$$x\in[-3,0]\Rightarrow -3\le x\le 0\Rightarrow -1\le x+2\le 2\Rightarrow 0\le (x+2)^2\le 4\Rightarrow -1\le (x+2)^2\le 3$$

$$x\in[-3,0]\Rightarrow f(x)\in[-1;3]$$

إذن : $f([-3,0])\subset[-1;3]$

عكسيا : ليكن $y\in[-1;3]$ و لنبين $\exists x\in[-3;0]\ /\ f(x)=y$

من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=y$

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Leftrightarrow y=(x+2)^2-1\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2=y+1\\ &\Leftrightarrow x+2=\sqrt{y+1}\ ou\ x+2=-\sqrt{y+1}\quad (car\ \ y+1\ge 0)\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}-2\ ou\ x=-\sqrt{y+1}-2 \end{aligned}$$

و بما أن :

$$y\in[-1;3]\Rightarrow -1\le y\le 3\Rightarrow 0\le y+1\le 4\Rightarrow 0\le\sqrt{y+1}\le 2\Rightarrow -2\le\sqrt{y+1}-2\le 0$$

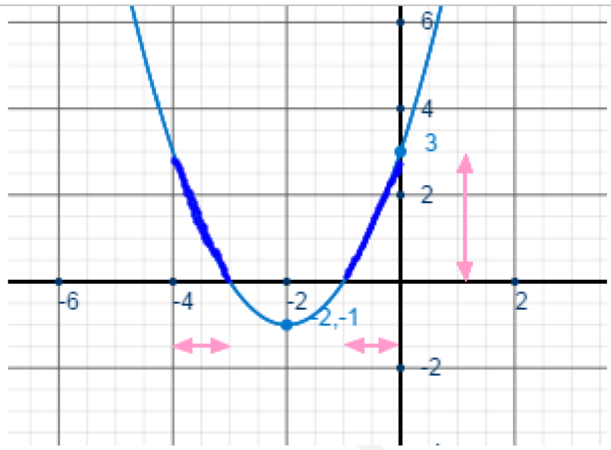
$$y\in[-1;3]\Rightarrow \sqrt{y+1}-2\in[-2;0]\Rightarrow \sqrt{y+1}-2\in[-3;0]$$

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;3]$

بالتالي: $f([-3,0])=[-1;3]$

5

مبيانيا نجد: $\boxed{f^{-1}([0,3])=[-4;-3]\cup[-1;0]}$



6

$$x\in f^{-1}([0,3])\Leftrightarrow f(x)\in[0,3]\Leftrightarrow 0\le (x+2)^2-1\le 3\Leftrightarrow 1\le (x+2)^2\le 4\Leftrightarrow 1\le |x+2|\le 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x+2\le 2\\ x+2\ge 1\ ou\ x+2\le -1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-4\le x\le 0\\ x\ge -1\ ou\ x\le -3\end{cases}\Leftrightarrow (-4\le x\le -3\ ou\ -1\le x\le 0)$$

منه: $\boxed{f^{-1}([0,3])=[-4;-3]\cup[-1;0]}$