عموميات حول الدوال العددية

أنشطة

أنشطة تذكيرية

نشاط1

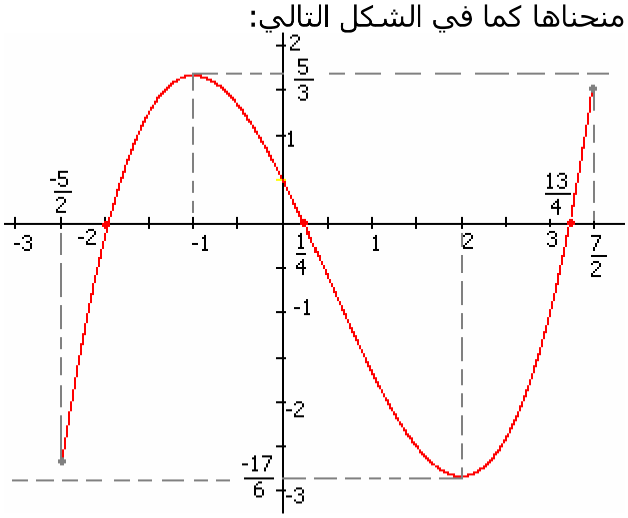
حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي في الحالات التالية:

أ/ $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-x+2}$ ب/ $f(x)=\sqrt{1-2x}$

ج/ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2x-1}$

نشاط2

لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{2}\right]$ و (C) منحناها كما في الشكل التالي:



1- حدد القيمة القصوى و القيمة الدنيا لدالة f على المجال $\left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{2}\right]$

2- استنتج أن $\dfrac{-17}{6}\leq f(x)\leq\dfrac{5}{3}$ $\forall x\in\left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{7}{2}\right]$

3- حل مبيانيا أ- $f(x)=0$ ب- $f(x)\geq 0$

4- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

نشاط3

I/ لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=x^2-2x$

و C_f منحنى الدالة f في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- تأكد أن $f(x)=(x-1)^2-1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أ/ بين أن المنحنى C_f صورة المنحنى (C) الممثل للدالة المعرفة بـ $x\to x^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;-1)$

ب/ حدد طبيعة C_f و أنشئه

II/ لتكن g دالة عددية لمتغير حقيقي معرفتين بـ $g(x)=x|x|-2x$

1- بين أن f دالة فردية

2- حدد جدول تغيرات الدالة f

3- أنشئ C_g في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

نشاط4

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$

و C_f منحنى الدالة f في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- تحقق أن $f(x)=-2+\dfrac{-3}{x-1}$ لكل x من D_f

2- أ- بين أن C_f صورة المنحنى (C) الممثل للدالة المعرفة بـ $x\to\dfrac{-3}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;-2)$

ب- أنشئ C_f

3- نعتبر g الدالة المعرفة بـ $g(x)=\dfrac{-2|x|-1}{|x|-1}$

أ- حدد D_g و أدرس زوجية g

ب- أنشئ C_g

نشاط5

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ و $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x+1}$

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- حدد طبيعة C_f و C_g مع إعطاء عناصرها المميزة

أنشطة التقديم

نشاط6 (دالة مكبورة- دالة مصغورة – دالة محدودة)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

1- بين بين أن $f(x)\prec 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2- أ/ بين أن $1\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ب/ حل المعادلة $1=f(x)$ $x\in\mathbb{R}$

3- استنتج أن $1\leq f(x)\prec 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

نشاط7 (مقارنة دالتين)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $f(x)=x^2-3x$; $g(x)=\dfrac{-x+3}{x+2}$

C_f و C_g المنحنيين الممثلين لـ f و g على التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- حدد تقاطع C_f و C_g.

2- أنشئ C_f و C_g.

3- حل مبيانيا المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

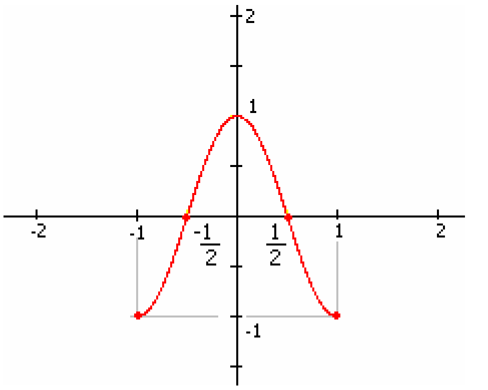
4- تحقق جبريا من حلول المتراجحة $f(x)\geq g(x)$

نشاط8 (الدالة الدورية)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=\cos(\pi x)$

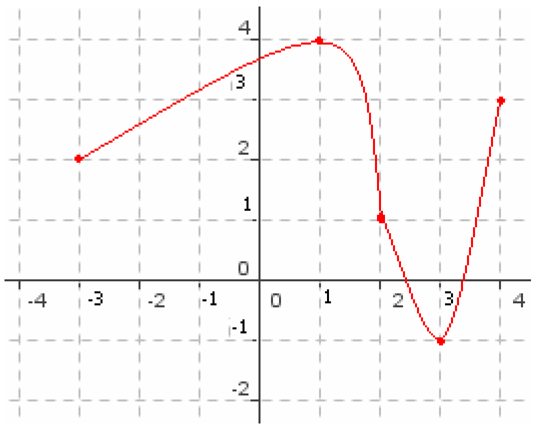
1- بين أن $f(x+2)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

2- أنشئ جزء المنحنى الدالة f على المجال $[-6;6]$ علما أن جزء المنحنى الدالة f على المجال $[-1;1]$ كما يلي



نشاط9 (صورة مجال)

الشكل التالي يمثل دالة عددية معرفة على المجال $[-3;4]$



1- أ/ بين أن $1\leq f(x)\leq 4$ $\forall x\in[-3;2]$

ب/ ليكن $y\in[1;4]$

بين أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا في $[-3;2]$

ج/ استنتج أن $f([-3;2])=[1;4]$

2- حدد مبيانيا صورة المجال $[-3;1]$ ثم $[2;4]$

نشاط10(مركب دالتين)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=-x+2$

1- أحسب $g(3)$ و $g(6)$ و $g\left(\dfrac{7}{4}\right)$ ثم أحسب

$f(g(3))$ و $f(g(6))$ و $f\left(g\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$

2- حدد مجال I بحيث لكل x من I يمكن حساب $f(g(x))$ حدد $f(g(x))$ لكل x من I

نشاط11(التمثيل المبياني لدالة $x\to\sqrt{x+a}$)

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=\sqrt{x+1}$

1- حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2- أدرس تغيرات كل من f و g

3- أ/ أتمم الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	$\frac{9}{4}$	4
$f(x)$						

ب/ مستعينا بالجدول أنشئ (C_f)

4- أ/ بين أن المنحنى (C_g) صورة المنحنى (C_f) بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;0)$

ب/ أنشئ (C_g)

نشاط12(التمثيل المبياني لدالة $x\to ax^3$)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=2x^3$

1- بين أن f فردية

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرات f

3- أ/ أتمم الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$						

ب/ أنشئ (C_f)

بالإتباع نفس الخطوات مثل مبيانيا الدالة $g(x)=-x^3$

عموميات حول الدوال العددية

I – تذكير

A /1- الدالة الزوجية- الدالة الفردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

* نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل x من D_f $-x \in D_f$

* لكل x من D_f $f(-x)=f(x)$

* نقول إن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان : * لكل x من D_f $-x \in D_f$

* لكل x من D_f $f(-x)=-f(x)$

ب- التأويل الهندسي

خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

-* تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

-* تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

2- تغيرات دالة

a- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \le f(x_2)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \ge f(x_2)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \succ f(x_2)$

b- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 و x_2 عنصرين مختلفين D_f

العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

ب- معدل التغير و الرتابة

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f و $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ معدل تغير الدالة f بين x_1 و x_2.

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T \ge 0$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T \succ 0$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T \le 0$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $T \prec 0$

c- الرتابة وزوجية دالة

خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $(J=\{-x / x \in I\})$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J = \{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

ملاحظة: لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

3- مطاريف دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال I و a عنصر من I

- نقول إن $f(a)$ هو القيمة القصوى لـ f على مجال I إذا كان $f(x) \le f(a)$ $\forall x \in I$ نكتب $f(a) = \underset{x \in D_f}{Max}\, f(x)$
- نقول ان $f(a)$ هو القيمة الدنيا لـ f على مجال I إذا كان $f(x) \ge f(a)$ $\forall x \in I$ نكتب $f(a) = \underset{x \in D_f}{Min}\, f(x)$

ب- خاصية

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a \prec b \prec c$ و f دالةعددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

B / - دراسة بعض الدوال الاعتيادية

1- الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

* يوجد عددان حقيقيان α و β حيث $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

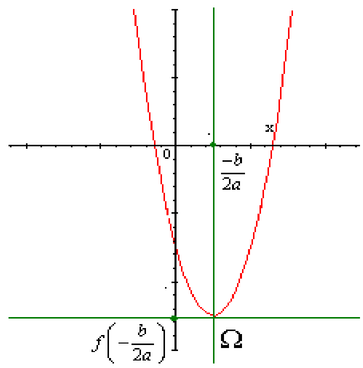
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x = \alpha$

ملاحظة: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ و $\beta = f(\alpha)$

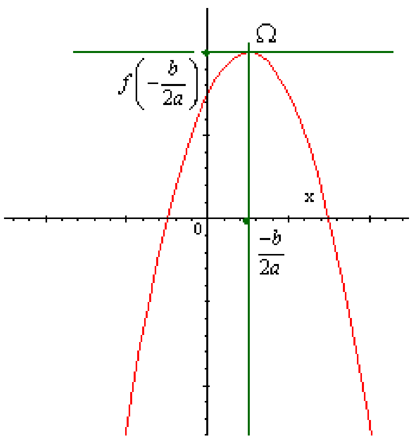
-* إذا كان $a \succ 0$ فان:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$



* إذا كان $a \prec 0$ فان:

x	$+\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$-\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$



2- الدالة المتخاطة

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

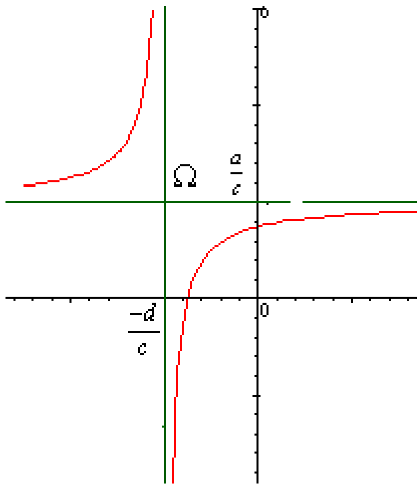
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\rightarrow\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

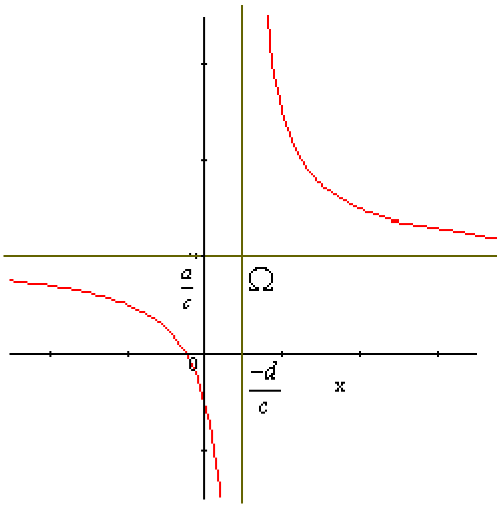
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↗	‖	↗



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↘	‖	↘



II– الدالة المكبورة –الدالةالمصغورة – الدالة المحدودة

1/ نشاط6

2/ تعاريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I

*- نقول إن f مكبورة على I اذا وجد عدد حقيقي M حيث: $f(x)\leq M$ لكل x من I

*- نقول إن f مصغورة على I اذا وجد عدد حقيقي m حيث: $f(x)\geq m$ لكل x من I

*- نقول إن f محدودة على I اذا وجد عددين M و m حيث: $m\leq f(x)\leq M$ لكل x من I

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I

نقول إن f محدودة على I اذا وجد عدد حقيقي موجب s حيث: $|f(x)|\leq s$ لكل x من I

تمرين

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة ب $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

-1 حدد D_f

-2 بين أن الدالة مكبورة على $[2,+\infty[$ بالعدد 2 و مصغورة على $[2,+\infty[$ بالعدد1

III– مقارنة دالتين- التأويل الهندسي

1/ نشاط7

2/ أ/ تساوي دالتين

- تعريف

نعتبر f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g مجموعتي تعريفهما على التوالي نقول إن f تساوي g و نكتب $f=g$ اذا و فقط اذا كان: * $D_f=D_g$ و * $f(x)=g(x)$ مهما كانت x من D_f

ب/ مقارنة دالتين

- تعريف

نعتبر f و g دالتين معرفتين مجال I نقول إن f أصغر أو تساوي g على I اذا كان: $f(x)\le g(x)$ مهما كانت x من I نكتب $f\le g$ على I

ج/ التأويل الهندسي

$f\le g$ على I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f تحت منحنى g على I

د/ الدالة الموجبة- الدالة السالبة

نعتبر f دالة معرفة على مجال I * f دالة موجبة على I $\Leftrightarrow (\forall x\in \mathrm{I}\,;f(x)\ge 0)$ * f دالة سالبة على I $\Leftrightarrow (\forall x\in \mathrm{I}\,;f(x)\le 0)$

IV– الدالة الدورية

-1 نشاط8

-2 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث $\forall x\in D_f \qquad x+T\in D_f\ ;\quad x-T\in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$ العدد T يسمى دور لدالة f. اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

أمثلة

* الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\sin x$ دوريتان و دورهما 2π * الدالة $x\to\tan x$ دورية دورها π

* الدالتان $x\to\cos ax$ و $x\to\sin ax$ (حيث $a\neq 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$

* الدالة $x\to\tan ax$ (حيث $a\neq 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

-3 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f,\forall n\in\mathbb{Z}$

-4 ملحوظة

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فانه:

- يكفي دراسة الدالةf على $D_f\cap[0,T[$ أو $D_f\cap\left[\dfrac{-T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$
- يستنتج جزء منحنى الـدالة f على $D_f\cap\left[\dfrac{-T}{2}+nT;\dfrac{-T}{2}+(n+1)T\right[$ حيث $n\in\mathbb{Z}$ من جزئ منحنى على $D_f\cap\left[\dfrac{-T}{2},\dfrac{T}{2}\right[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(nT;0)$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

V– صورة مجال بدالة

-1 نشاط9

-2 تعريف

لتكن f دالة عددية للمتغير حقيقي و I مجال ضمن من D_f صورة المجال I بالدالة f هي مجموعة جميع صور عناصر I بالدالة f نرمز له بـ $f(I)$ $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$

ملحوظة:

* $y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I \quad / f(x) = y$

* f دالة عددية و I مجال ضمن من D_f J مجال ضمن $\mathbb{R}$

$$f(I) \subset J \Leftrightarrow \forall x \in I \quad \exists y \in J \quad / f(x) = y$$

$$J \subset f(I) \Leftrightarrow \forall y \in J \quad \exists x \in I \quad / f(x) = y$$

VI– مركب دالتين

1- نشاط10

2- تعريف

لتكن f و g دالتين حيث $f(D_f) \subset D_g$

مركبة الدالتين f و g في هذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ حيث لكل $x \in D_f$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] & D_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

مجموعة تعريف $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \, / \, f(x) \in D_g\}$$

تمرين

لتكن $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = 2x - 1$

حدد $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارنهما

ملاحظة : على العموم $g \circ f \neq f \circ g$

تمرين $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x - 1$ $\qquad h(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 8x + 1}$

1- حدد $f \circ g \quad ; g \circ f \quad ; h \circ g$

2- حدد دالة t حيث $h = t \circ g$

3 - حدد دالة l حيث $f = l \circ g$

3 - مركب دالتين و الرتابة

لتكن f و g دالتين و I و J مجالين ضمن D_f و D_g على التوالي حيث $f(I) \subset J$

- إذا كان f تزايدية على I و g تزايدية على J فان $g \circ f$ تزايدية على I
- إذا كان f تناقصية على I و g تناقصية على J فان $g \circ f$ تزايدية على I
- إذا كان f تزايدية على I و g تناقصية على J فان $g \circ f$ تناقصية على I
- إذا كان f تناقصية على I و g تزايدية على J فان $g \circ f$ تناقصية على I

تمرين

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$f(x) = 3x - 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 + 1$$

باستعمال تغيرات f و g حدد تغيرات $f \circ g$ و $g \circ f$

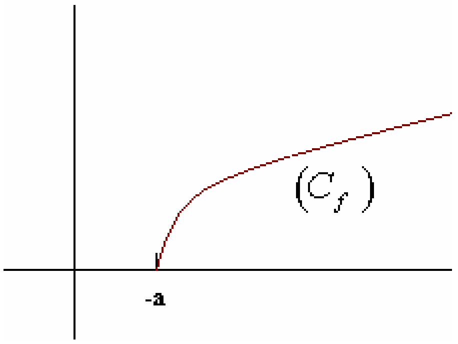
VI– تمثيل الدالتين $x \to ax^3$ و $x \to \sqrt{x+a}$

1- الدالة $x \to \sqrt{x+a}$

نشاط11

خاصية

الدالة $f: x \to \sqrt{x+a}$ معرفة و تزايدية قطعا على $[-a;+\infty[$



أمثلة : في نفس المعلم أنشئ C_f من أجل $a=0$ و $a=2$ و $a=-1$

تمرين

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{-x^2+1}$

1- أعط جدول تغيرات f و أنشئ (C_f)

2- حدد D_g ثم حدد تغيرات الدالة g باستعمال مركب دالتين

2- الدالة $x \to ax^3$

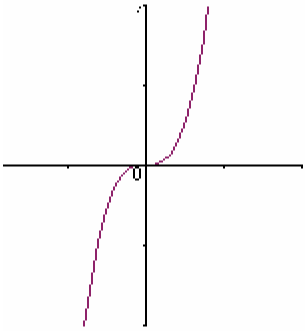
نشاط12

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=ax^3$ و $a \in \mathbb{R}^*$

*- إذا كان $a \succ 0$ فان f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

*- $a \succ 0$



*- إذا كان $a \prec 0$ فان f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

*- $a \prec 0$