درس : عموميات حول الدوال

i. تذكير و إضافات:

A. تذكير :

1. تذكير 1: - حول دالة عددية –

تعريف 1:

- كل علاقة f تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بعنصر واحد على الأكثر y من $\mathbb{R}$ تسمى دالة عددية ونكتب: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)$
- جميع العناصر x من $\mathbb{R}$ التي لها صورة ب f تكون مجموعة تسمى مجموعة تعريف الدالة f و يرمز لها ب D_f أو D .

2. تذكير 2: - حول زوجية دالة -

تعريف 2: (f دالة عددية زوجية)

f دالة عددية حيث D_f مجموعة تعريفها .

f زوجية على D_f $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{ll}\forall x\in D_f\ ,\ -x\in D_f & (1)\\ \forall x\in D_f\ ,\ f(-x)=f(x) & (2)\end{array}\right\}$

تعريف 3: (f دالة عددية فردية)

f دالة عددية حيث D_f مجموعة تعريفها .

f فردية على D_f $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{ll}\forall x\in D_f\ ,\ -x\in D_f & (1)\\ \forall x\in D_f\ ,\ f(-x)=-f(x) & (2)\end{array}\right\}$

3. رتابة دالة عددية :

تعريف 4:

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على مجال I.

- f دالة تزايدية (تزايدية قطعا) على I يكافئ: لكل x و x' من I لدينا : إذا كان $x<x'$ فإن: $f(x)\le f(x')$ ($f(x)<f(x')$) (أي اتجاه المتفاوتة لا يتغير) . أو أيضا : $\forall x,x'\in I: x<x'\Rightarrow f(x)\le f(x')$. $\left(\forall x,x'\in I: x<x'\Rightarrow f(x)<f(x')\right)$
- f دالة تناقصية (تناقصية قطعا) على I يكافئ: لكل x و x' من I لدينا : إذا كان $x<x'$ فإن: $f(x)\ge f(x')$ $(f(x)>f(x'))$ (أي اتجاه المتفاوتة يتغير) . أو أيضا : $\forall x,x'\in I: x<x'\Rightarrow f(x)\ge f(x')$ $\left(\forall x,x'\in I: x<x'\Rightarrow f(x)>f(x')\right)$
- f دالة ثابتة على I يكافئ: لكل x و x' من I لدينا : $f(x)=f(x')$ أو أيضا : $\forall x,x'\in I: f(x)=f(x')$

4. مطارف دالة عددية Extrémums d'1 fonction

تعريف 5: قيمة قصوى مطلقة على D_f maximale absolue. قيمة دنيا مطلقة على D_f V. minimale absolue.

f دالة عددية معرفة على D_f حيث $x_0\in D_f$.

- $f(x_0)$ قيمة قصوى مطلقة ل f (أو f تقبل قيمة قصوى مطلقة عند x_0) إذا و فقط إذا كان : $\forall x\in D_f\ , f(x)\le f(x_0)$.
- $f(x_0)$ قيمة دنيا مطلقة ل f (أو f تقبل قيمة دنيا مطلقة عند x_0) إذا و فقط إذا كان : $\forall x\in D_f\ , f(x)\ge f(x_0)$.

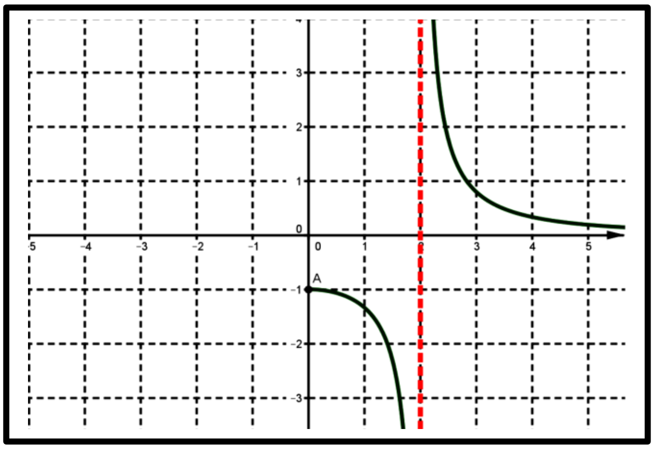
5. أنشطة:

نشاط 1 : حول إتمام منحنى دالة – زوجية - فردية –

1- أتمم جدول تغيراتها الدالة f و منحناها في كلتا الحالتين.

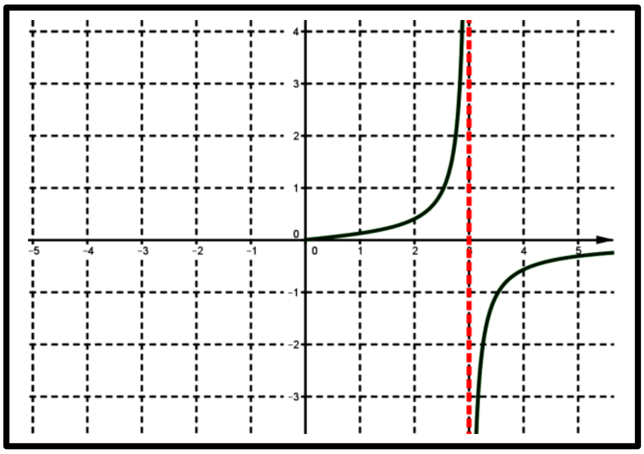
أ- نعتبر f دالة عددية معرفة و زوجية على D_f.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f(x)	‖		1 ↘	‖	↘



ب- نعتبر f دالة عددية معرفة و فردية على D_f.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
f(x)	‖		0 ↗	‖	↗



2- ماذا يمثل العدد $f(0)$ بالنسبة للدالة f في الحالة (أ) .

تمرين :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

1- أ - حدد D_f حيز تعريف f . ب – أدرس زوجية f. ج – استنتج D_E مجموعة دراسة f.

2- أ – أدرس رتابة f على كل من المجالين $[0,1[$ ثم $]1,+\infty[$. ب - ضع جدول التغيرات ل f على D_E ثم على D_f .

3- هل الدالة f تقبل مطراف ؟ حدده .

B. إضافات :

1. مطارف نسبية :

تعريف:

أ- قيمة قصوى نسبية: V. maximale relative - قيمة دنيا نسبية: V. minimale relative

f دالة عددية معرفة على D_f حيث $x_0\in D_f$.

- $f(x_0)$ قيمة قصوى نسبية ل f (أو f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0) إذا وجد مجال مفتوح I_{x_0} ضمن D_f مركزه x_0 حيث:
  $\forall x\in I_{x_0}\ ,\ f(x)\le f(x_0)$
- $f(x_0)$ قيمة دنيا نسبية ل f (أو f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0) إذا وجد مجال مفتوح I_{x_0} ضمن D_f مركزه x_0 حيث:
  $\forall x\in I_{x_0}\ ,\ f(x)\ge f(x_0)$

2. معدل تغيرات دالة عددية:

a. تعريف:

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I.

x و x' من I حيث $x \neq x'$ العدد $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ يسمى معدل تغيرات الدالة f بين x و x' ، ويرمز له ب: T_f.

b. مثال:

أحسب معدل تغيرات f على $\mathbb{R}$. حيث $f(x)=2x$

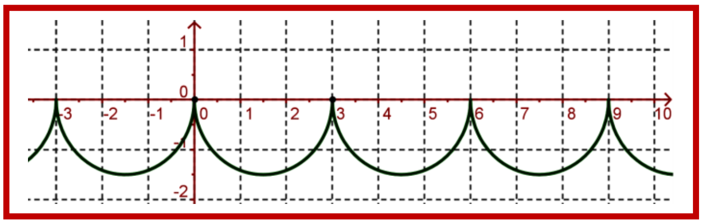
c. خاصية:

T_f معدل تغيرات دالة عددية f على مجال I.

- إذا كان $T_f \leq 0$ فإن الدالة f تناقصية على I.
- إذا كان $T_f < 0$ فإن الدالة f تناقصية قطعا على I.
- إذا كان $T_f \geq 0$ فإن الدالة f تزايدية على I.
- إذا كان $T_f > 0$ فإن الدالة f تزايدية قطعا على I.
- إذا كان $T_f = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

C. دالة دورية: fonction périodique

1. نشاط 1 :



نأخذ x من $\mathbb{R}$

1. ضع على محور الأفاصيل x ثم $x+3$.

2. حدد على المنحنى $f(x)$ ثم $f(x+3)$. ماذا تلاحظ ؟

نلاحظ إن $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+3)=f(x)$.

2. مفردات:

نقول إن f دورية ودورها $T=3$ أو أيضا $P=3$.

3. تعريف:

f دالة عددية معرفة على D_f و T من $\mathbb{R}^{+*}$.

f دالة دورية و دورها T يكافئ : -1 $x \in D_f \Rightarrow x+T \in D_f$ و $x-T \in D_f$.

-2 $\forall x \in D_f \ : f(x+T)=f(x)$

ملحوظة: مع T أصغر عدد حقيقي موجب قطعا يحقق العلاقة (2).

4. أمثلة:

- **مثال 1 :**

1. $f(x)=\sin x$ دورية ودورها $T=2\pi$.
2. $f(x)=\cos x$ دورية ودورها $T=2\pi$.
3. $f(x)=\tan x$ دورية ودورها $T=\pi$.

- **مثال 3 :**

بين أن الدالة $f(x)=\sin ax$ دورية على $\mathbb{R}$ و دورها $T=\frac{2\pi}{|a|}$ (مع $a \neq 0$)

5. تمرين تطبيقي:

f دالة عددية معرفة و دورية على D_f و دورها T.

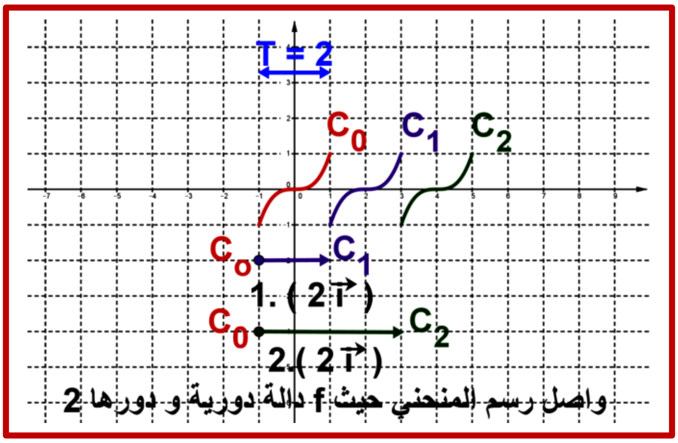
1. بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \forall x\in D_f\ :f(x+nT)=f(x)$.
2. بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ \forall x\in D_f\ :f(x-nT)=f(x)$.

6. منحنى دالة دورية:

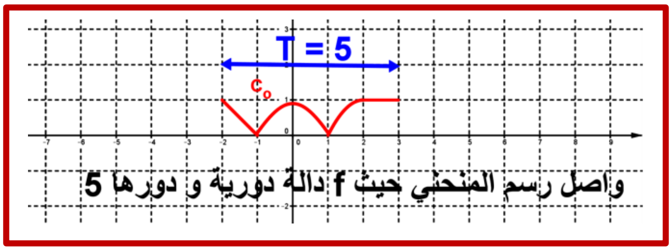
f دالة عددية معرفة و دورية على D_f و T دورها.

- ننشئ منحناها C_0 على $I_0=[a,a+T]\cap D_f$ طوله T
- ثم إزاحة المنحنى C_0 بالإزاحة ذات المتجهات $\vec{u}=(kT)\vec{i}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

مثال 1 :



مثال 2 :



D. دالة الجزء الصحيح : la partie entière .

1. نشاط:

نعتبر x من $\mathbb{R}$.

أتمم الجدول بتحديد العدد الصحيح النسبي p حيث $p\le x<p+1$.

x	.....	$4,55$	$0,78$	$-0,78$	$-4,55$	....
p						

2. مفردات – رمز.

العدد p يسمى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x ويرمز له ب: $p=E(x)$ أو أيضا $p=[x]$.

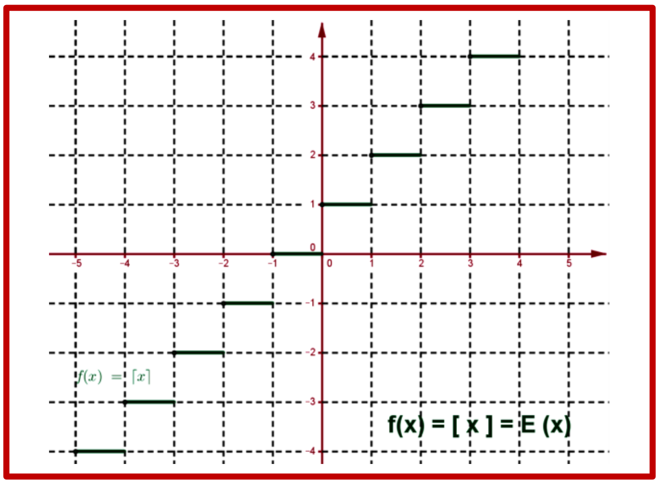
3. تعريف:

x عدد حقيقي .
العدد الصحيح النسبي p الذي يحقق العلاقة $p\le x<p+1$ يسمى الجزء الصحيح النسبي ل x و يرمز له ب:
$p=E(x)$ أو أيضا $p=[x]$. إذن: $E(x)\le x<E(x)+1$.

4. ملحوظة:

- $\forall x\in I_p=[p,p+1[\ :f(x)=[x]=E(x)=p$
- $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow E(x)=x$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ E(x)\le x<E(x)+1$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z}:E(x+k)=E(x)+k$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x-1<E(x)\le x$ (نستعملها في التمارين) .

5. منحنى دالة الجزء الصحيح:



6. تمرين تطبيقي:

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=2x-E(x)$

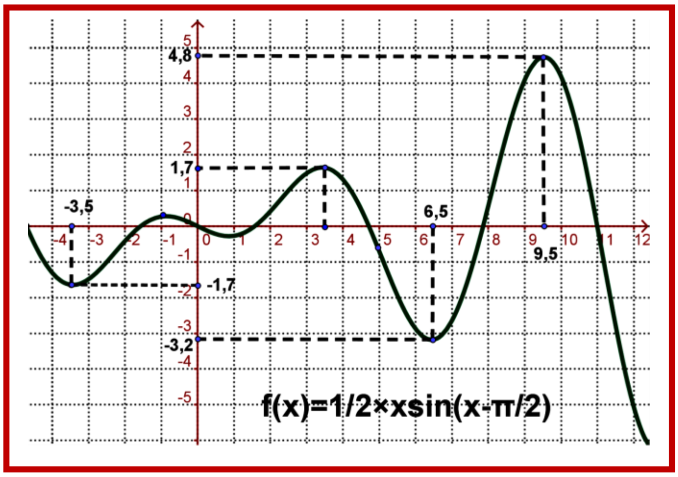
1. نعتبر المجالات I_k حيث: $I_k=[k,k+1[$ مع $k\in\mathbb{Z}$.
حدد $f(x)$ حيث x من I_k.
2. أ - أنشئ C_0 منحنى f على $I_0=[0,1[$.
ب – أنشئ C_k منحنى f على $I_k=[k,k+1[$.

ii. دالة مكبورة - دالة مصغورة - دالة محدودة - مطارف دالة عددية :

A. دالة: مكبورة – مصغورة – محدودة:

1. نشاط :

المنحنى التالي يمثل دالة عددية f .



اتمم ما يلي :

1- $\forall \in[-4;11]: f(x)....5$
2- $.\forall x....[-4;11]: -4....f(x)$
3- $\forall x\in[\cdots,\cdots]: -4....f(x).....5$

2. مفردات:

نقول إن:

- f مكبورة ب 5 على $[-4,11]$. (أو أيضا ب 6).
- f مصغورة ب -4 على $[-4,11]$. (أو أيضا ب -7)
- f محدودة على $[-4;11]$

3. تعاريف:

f دالة عددية معرفة على I ضمن $\mathbb{R}$. M و m عددان من $\mathbb{R}$.
f مكبورة ب M على I يعني $\forall x\in I\ ;\ f(x)\le M$. (أو أيضا $f(x)<M$)
f مصغورة ب m على I يعني $\forall x\in I\ ;\ m\le f(x)$. (أو أيضا $m<f(x)$)
f محدودة على I يعني $\forall x\in I\ ;\ m\le f(x)\le M$. (أو أيضا $m<f(x)<M$)

4. مثال1:

f دالة عددية حيث جدول تغيراتها هو كالتالي:

x	-3		0		5		9		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	7	↘	-14	↗	-6	↘	-12

1. هل f مكبورة ؟ هل f مصغورة ؟ هل f محدودة ؟ على $[-3,+\infty[$.
2. ماذا يمثل 7 ثم -14 بالنسبة للدالة f على $[-3,11]$ ؟
3. ماذا يمثل 7 ثم 6 - بالنسبة للدالة f ؟

5. مثال2:

f دالة عددية معرفة ب $f(x) = \frac{1}{x}$ على $I = [1;+\infty[$.

- بين أن f مصغورة ب 0 على I.
- بين أن f مكبورة على I.
- هل f محدودة على I؟

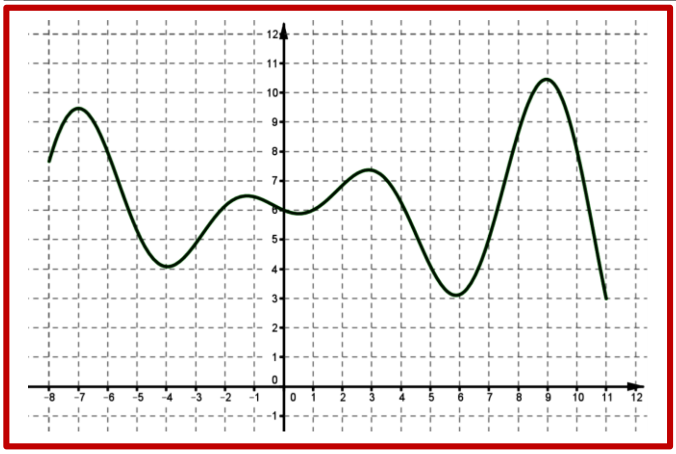
6. ملاحظة :

f محدودة على I يكافئ يوجد A من $\mathbb{R}^+$ حيث لكل x من I لدينا $|f(x)| \le A$. أو أيضا : $\exists A \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in I : |f(x)| \le A$

7. مثال:

الرسم التالي يمثل منحنى دالة عددية f .

1. هل f مكبورة هل مصغورة ،هل محدودة ،على $[-8,11]$؟

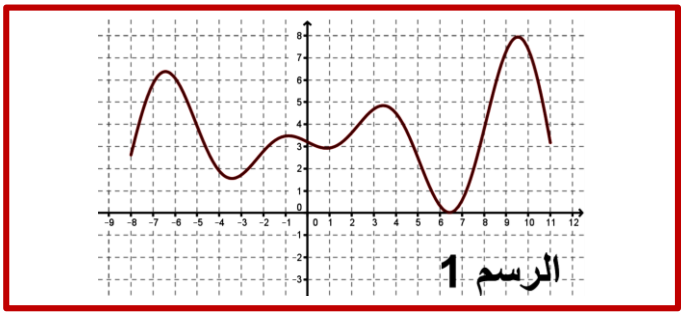


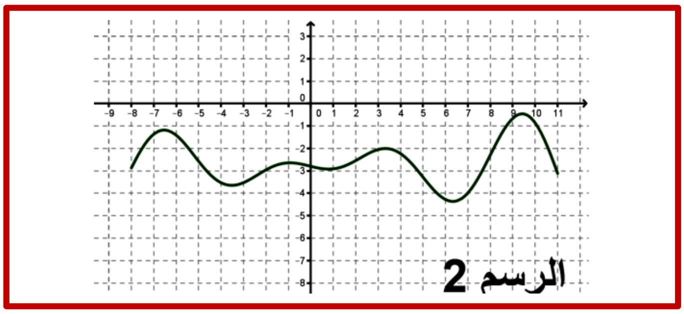
iii. مقارنة دالتين-التأويل الهندسي

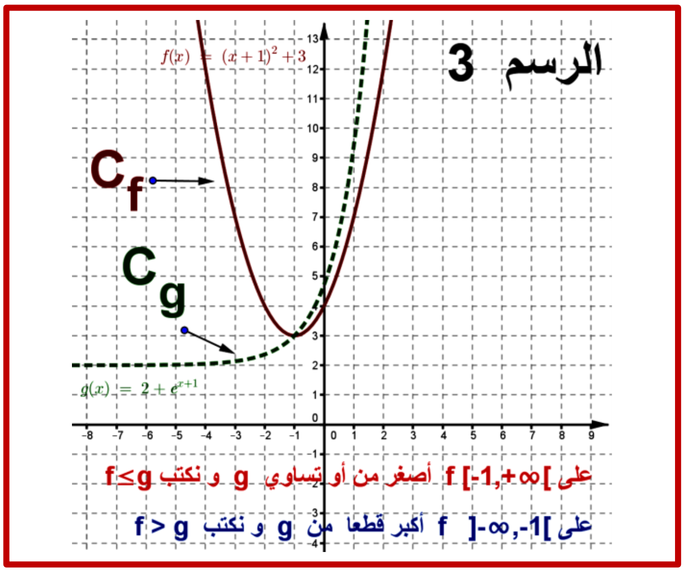
A. دالة موجبة – دالة سالبة -

1. نشاط:

1. الرسم 1 يمثل منحنى الدالة f. نقول أن الدالة f موجبة على $[-8,11]$. ماهي الميزة التي يتميز بها C_f. ثم عبر عنها باستعمال الرموز.
2. الرسم 2 يمثل منحنى الدالة f. نقول أن الدالة f موجبة على $[-8,11]$. ماهي الميزة التي يتميز بها C_f. ثم عبر عنها باستعمال الرموز.







2. تعريف:

f دالة عددية معرفة على D_f .

f موجبة على D_f يكافئ $\forall x \in D_f : f(x) \ge 0$.

f سالبة قطعا على D_f يكافئ $\forall x \in D_f : f(x) < 0$.

B. مقارنة دالتين: (الرسم 3 يمثل منحنيا f و g)

نقول إن الدالة f أصغر من أو يساوي الدالة g وعلى $[-1,+\infty[$

نقول إن الدالة f أكبر قطعا من الدالة g على $]-\infty,-1[$.

1. عبر عن ذلك باستعمال عناصر x من $[-1,+\infty[$ ثم $]-\infty,-1[$

ماذا يمكن ان نقول عن الحالة التي تكون فيها الدالة f تساوي g؟

1. تعريف:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I.

- ($f \le g$ على I) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I : f(x) \le g(x))$.
- ($f > g$ على I) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I : f(x) > g(x))$.

2. التأويل الهندسي :

$f = g$ على مجال I. يعني هندسيا أن منحنيان f و g منطبقان على المجال I .

$f \le g$ على مجال I.يعني هندسيا أن منحنى f يوجد تحت منحنى g على المجال I .

$f \le 0$ على مجال I.يعني هندسيا أن منحنى f يوجد تحت محور الأفاصيل على المجال I .

$f > 0$ على مجال I.يعني هندسيا أن منحنى f يوجد قطعا فوق محور الأفاصيل على المجال I . (لا توجد أي نقطة مشتركة مع محور)

iv. مركب دالتين :

1. نشاط :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين ب $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 + 1$.

1- حدد D_f و D_f .

2- أ – أحسب: $f(1)$; $g(5)$

ب- أكتب: $g(5)$ بدلالة f و 1 .

3 – أحسب: $g(f(3))$ ثم $g(f(x))$.

2. مفردات و رمز :

- الدالة $h : x \mapsto h(x) = g(f(x))$ نرمز لها ب: $h = g \circ f$. و منه: $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$
- الدالة $g \circ f$ تسمى مركبة الدالتين f ثم g في هذا الترتيب .
- نستعمل الرسم الاتي للدالة $g \circ f$

$$h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \quad f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)$$

3. تعريف:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على D_f و D_g . (على التوالي) حيث $f(D_f) \subset D_g$.

نضع $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$.

الدالة العددية h المعرفة على D_{gof} بما يلي $h(x) = g(f(x))$ تسمى مركبة الدالتين f ثم g ونرمز لها ب $h = g \circ f$.

4. مثال:

$f(x) = 2x^2 + 3x$; $g(x) = 5x - 7$

1- حدد D_{fog} ; D_{gof}

2- أحسب : $g \circ f(x)$ و $f \circ g(x)$

3- أ - أحسب $g \circ f(2)$ و $f \circ g(2)$ ب- ماذا تستنتج ؟

V. رتابة $f+c$ و $c.f$ و $f\circ g$ مع c من $\mathbb{R}^*$:

A. رتابة $f+c$ و $c.f$

1. نشاط :

f دالة عددية معرفة على مجال I . T_f معدل تغيراتها على I و c من $\mathbb{R}^*$.

نعتبر الدالتين h و g حيث : $\forall x\in I , h(x)=f(x)+c$ و $\forall x\in I , g(x)=c\times f(x)$

1. أوجد T_h معدل تغيرات h على I. ثم أعط استنتاج .
2. أوجد T_g معدل تغيرات g على I. ثم أعط استنتاج .

جواب:

1. نجد T_h معدل تغيرات h على I.ثم أعط استنتاج .

ليكن x و x' من I حيث $x'\neq x$.

لدينا :

$$T_h=\frac{h(x)-h(x')}{x-x'}=\frac{f(x)+c-(f(x')+c)}{x-x'}=\frac{f(x)-f(x)}{x-x'}=\frac{f(x)-f(x)}{x-x'}=T_f$$

ومنه : $T_h=T_{f+c}=T_f$

خلاصة : f و f+c لهما نفس منحى التغيرات على I .

2. نجد T_g معدل تغيرات g على I.ثم أعط استنتاج .

ليكن x و x' من I حيث $x'\neq x$.

لدينا :

$$T_g=\frac{g(x)-g(x')}{x-x'}=\frac{c\times f(x)-c\times f(x)}{x-x'}=\frac{c\times(f(x)-f(x))}{x-x'}=c\times T_f$$

ومنه : $T_g=T_{c\times f}=c\times T_f$

خلاصة :

- إذا كان $c>0$ فإن f و $c\times f$ لهما نفس منحى التغيرات على I.
- إذا كان $c<0$ فإن منحى تغيرات $c\times f$ معاكس لمنحى تغيرات f على I.

2. خاصية:

> f دالة عددية معرفة على مجال I . T_f معدل تغيراتها على I و c من $\mathbb{R}^*$.
>
> 1. الدالتان f و f+c لهما نفس منحى التغيرات على I .
> 2. إذا كان $c>0$ فإن f و $c\times f$ لهما نفس منحى التغيرات على I.
> 3. إذا كان $c<0$ فإن منحى تغيرات $c\times f$ معاكس لمنحى تغيرات f على I.

B. رتابة $f\circ g$:

1. نشاط :

f و g دالتنا معرفتين على I و J (على التوالي) حيث : $\forall x\in I; f(x)\in f(J)$.

حالة 1 : f و g لهما نفس الرتابة قطعا.

1) أكتب معدل تغيرات الدالة $g\circ f$ على $D_{g\circ f}$.

2) أتمم ما يلي $\dfrac{..............}{..............} \times \dfrac{g(f(x))-g(f(x'))}{f(x)-f(x')} = T_{gof}$.

3) استنتج كتابة أخرى ل : $T_{g\circ f}$.

4) استنتج رتابة $g\circ f$.

1. خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على D_f و D_g (على التوالي) حيث $\forall x \in D_f \ ; \ f(x) \in f(D_g)$

- إذا كانت f و g لهما نفس الرتابة (الرتابة قطعا) على D_f و D_g فإن $g\circ f$ تزايدية (تزايدية قطعا) على D_f.
- إذا كانت f و g ليس لهما نفس الرتابة (الرتابة قطعا) على D_f و D_g فإن $g\circ f$ تناقصية (تناقصية قطعا) على D_f.

2. مثال:

$f(x)=|x|+5$ و $g(x)=x^2$

1. حدد : D_f و D_g .
2. أعط رتابة f و g على $\mathbb{R}$. (بواسطة جدول).
3. استنتج رتابة $g\circ f$ على $\mathbb{R}$.

vi. دراسة بعض الدوال العددية مع إنشاء المنحنى:

A. دراسة الدالة الحدودية من الدرجة 2: $x \mapsto ax^2+bx+c$

1. نشاط:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ مع $a\neq 0$.

لدينا : $$(1) : f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

(حسب الشكل القانوني ل ax^2+bx+c). نلاحظ أن: $-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$. ومنه:

$$(1) \Leftrightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \ ; (2)$$

أ- حالة 1 : $a>0$

$$(2) \Rightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

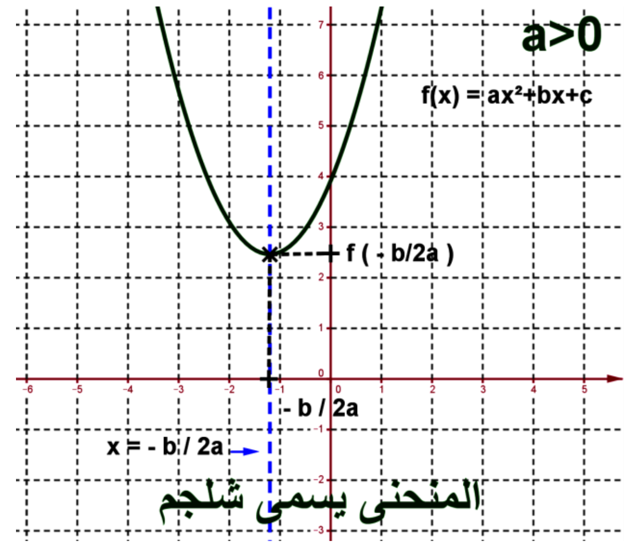
$$\Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right)\leq f(x)$$

و منه : $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ القيمة الدنيا المطلقة ل f على $\mathbb{R}$.

- جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗

- المنحنى للدالة f :



- المنحنى للدالة f يسمى شلجم . الشلجم موجه نحو الأعلى رأسه هو $S\left(-\dfrac{b}{2a},f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$
- محور تماثله هو المستقيم الذي معادلته: $(D) : y = -\dfrac{b}{2a}$.

ب- حالة 2: $a<0$

لدينا: $(2) \Rightarrow f(x)-f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=a\left(x-\dfrac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$

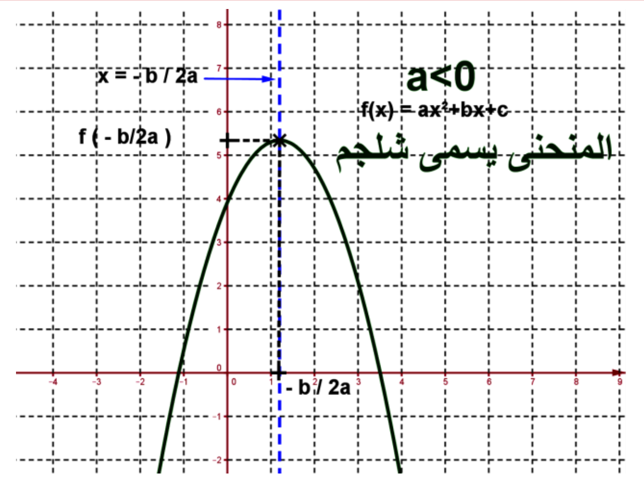
$\Rightarrow f(x) \leq f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

و منه : $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ القيمة القصوى المطلقة ل f على $\mathbb{R}$.

- جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘

- المنحنى للدالة f :



- المنحنى للدالة f يسمى شلجم . موجه نحو الأسفل و رأسه هو $S\left(-\dfrac{b}{2a},f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$
- محور تماثله هو المستقيم الذي معادلته: $(D) : y = -\dfrac{b}{2a}$

2. أمثلة:

- **مثال1:**

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=2x^2+4x+3$.

1. ماهي العناصر المميزة لمنحنى f .
2. ضع جدول تغيرات f .
3. أنشئ منحنى f في م . م . م. $(O,\vec{i},\vec{j})$.

جواب:

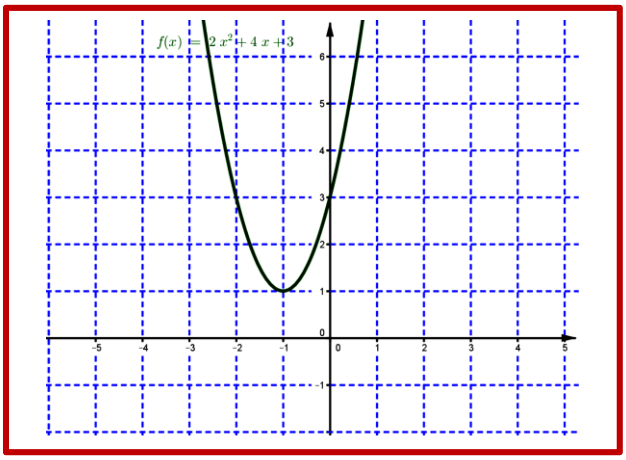
1. العناصر المميزة لمنحنى f :

المنحنى هو شلجم موجه نحو الأعلى : رأسه $S(-1,1)$ ـ محور تماثله هو المستقيم الذي معادلته $(D) : y = -1$.

2. نضع جدول تغيرات f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(-1)=1$	$\nearrow$

3. ننشئ منحنى f.



- مثال 2:
- مثال 2 :

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=-x^2+4x$.

1. ماهي العناصر المميزة لمنحنى f .
2. ضع جدول تغيرات f .
3. أنشئ منحنى f في م . م. م. $(O,\vec{i},\vec{j})$.

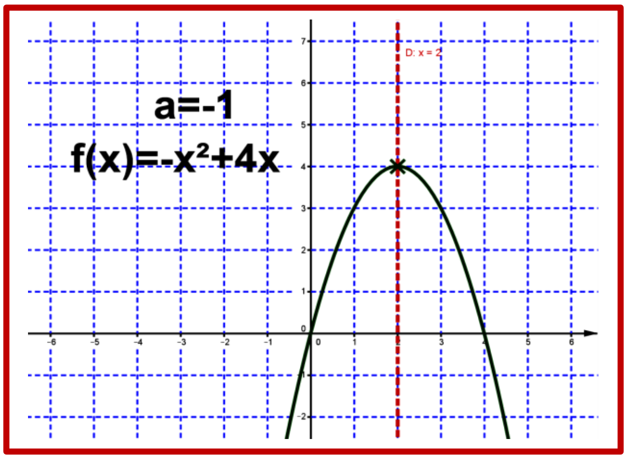
جواب:

1. العناصر المميزة لمنحنى f :

المنحنى هو شلجم موجه نحو الأسفل ـ رأسه $S(2,4)$ ـ محور تماثله هو المستقيم الذي معادلته $(D) : y = 2$.

2. نضع جدول تغيرات f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(2)=4$	$\searrow$



3. ننشئ منحنى f.

B. دراسة الدالة $f(x)=ax^3$; $(a\neq 0)$.

1. دراسة الدالة:

- مجموعة تعريف f: $D_f=\mathbb{R}$ لأن f حدودية.
- f فردية: $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a(-x)^3=-ax^3=f(x)$
- مجموعة دراسة f: $D_E=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^+=\mathbb{R}^+$.
- رتابة f على D_E: ليكن x و x' من D_E حيث: $x<x'$.

$$(1) : x<x' \Rightarrow x^3 < (x')^3$$

أ- حالة 1: $a>0$

$$(1) \Rightarrow ax^3 < a(x')^3$$
$$\Rightarrow f(x)<f(x')$$

و منه: f تزايدية قطعا على D_E و لها نفس الرتابة على $\mathbb{R}^-$.

جدول تغيرات f هو كالتالي :

$a>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	0	↗

ب- حالة 2: $a<0$

$$(1) \Rightarrow ax^3 > a(x')^3$$
$$\Rightarrow f(x) > f(x')$$

و منه: f تناقصية قطعا على D_E و لها نفس الرتابة على $\mathbb{R}^-$.

جدول تغيرات f هو كالتالي :

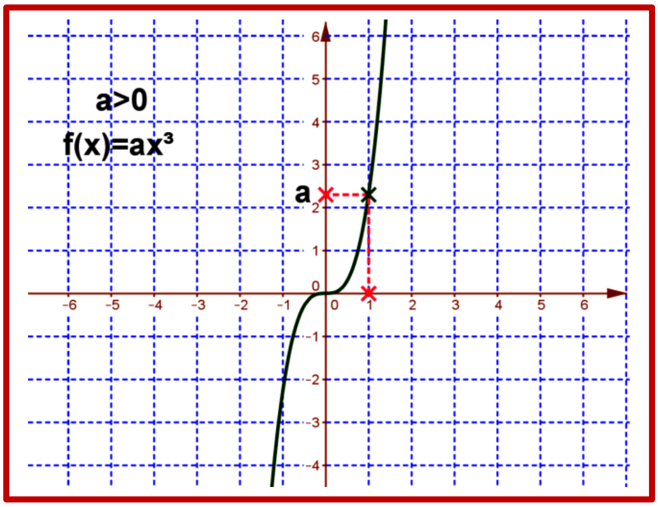
$a<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↘	0	↘

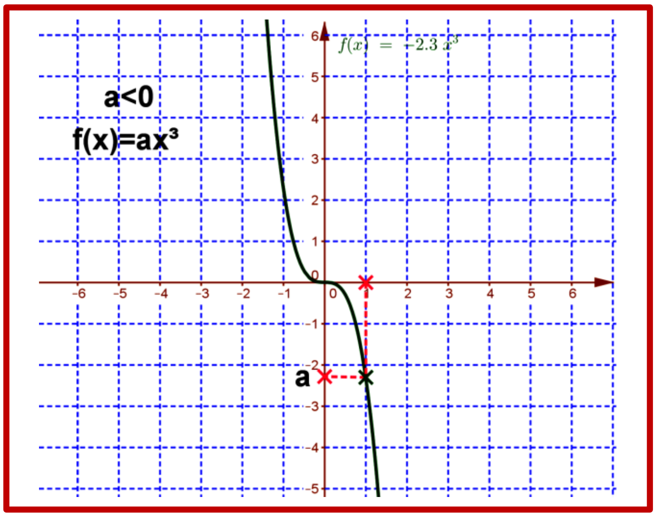
- جدول تغيرات و منحنى f على D_f :

حالة 1: $a>0$

$a>0$ منحنى f يكون على الشكل التالي:



$a<0$ منحنى f يكون على الشكل التالي:



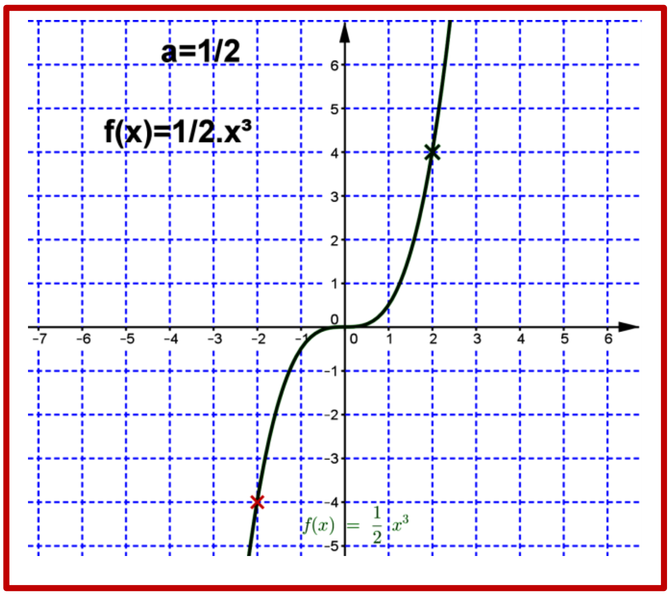
2. مثال:

مثال 1 : $f(x)=\frac{1}{2}x^3$.

جدول تغيرات f هو كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	0	↗

منحنى f يكون على الشكل التالي:

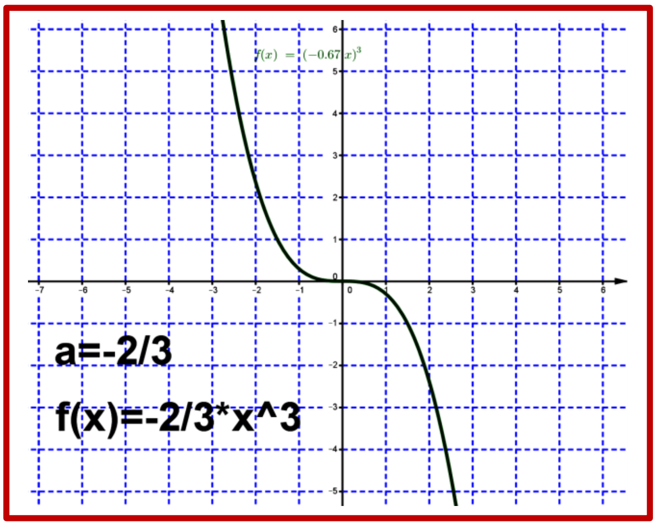


مثال 2 : $f(x)=-\frac{2}{3}x^3$

جدول تغيرات f هو كالتالي :

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ 0 $\quad$ $\searrow$

منحنى f يكون على الشكل التالي:



C. دراسة الدالة $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $(c\neq 0)$ و $\Delta=ad-bc\neq 0$. الدالة المتخاطة – fonction homographique

1. دراسة الدالة:

- مجموعة تعريف f:

$x\in D_f \Leftrightarrow cx+d\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{d}{c}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}=\left]-\infty,-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$.

- رتابة f على D_f :

ليكن x و x' من D_f حيث: $x<x'$.

$$T_f=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\quad ;(x\neq x')$$
$$=\frac{\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{ax'+b}{cx'+d}}{x-x'}$$
$$=\frac{\frac{(ax+b)(cx'+d)-(ax'+b)(cx+d)}{(cx+d)(cx'+d)}}{x-x'}$$
$$=\frac{adx+bcx'-adx'-bcx}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$
$$=\frac{x(ad-bc)-x'(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$
$$=\frac{(ad-bc)\cancel{(x-x')}}{(cx+d)(cx'+d)\cancel{(x-x')}}=\frac{(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)}=\frac{\Delta}{(cx+d)(cx'+d)}\quad ;(\Delta=ad-bc)$$

أ- رتابة f على $\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$.

لدينا: $(cx+d)(cx'+d)>0$ و منه إشارة T_f هي إشارة Δ

ب- رتابة f على $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$.

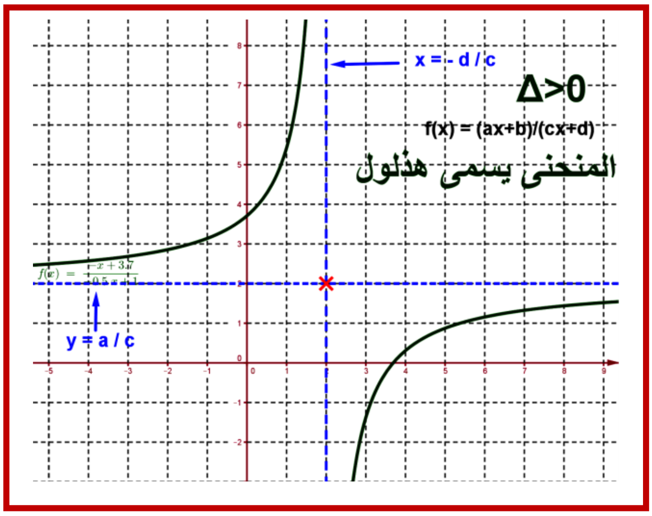
لدينا: $(cx+d)(cx'+d)>0$ و منه إشارة T_f هي إشارة Δ و بالتالي الدالة f لها نفس الرتابة على $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$ و $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$. الرتابة مرتبطة بإشارة Δ.

و جدول تغيرات f و (C_f) منحناها على D_f في م.م.م. $(O;\vec{i};\vec{j})$

حالة 1: $\Delta>0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f	↗	‖	↗

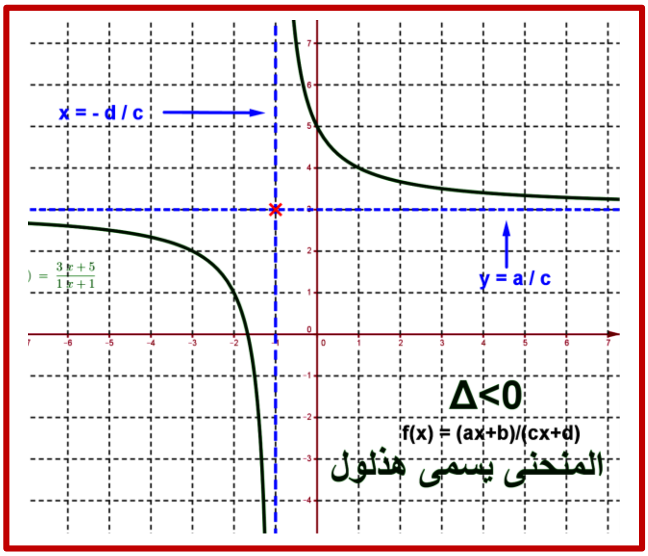
$\Delta>0$



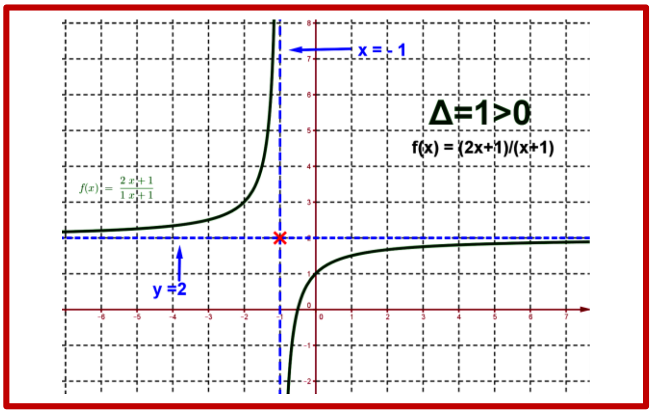
حالة 2 : $\Delta<0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

$\Delta<0$



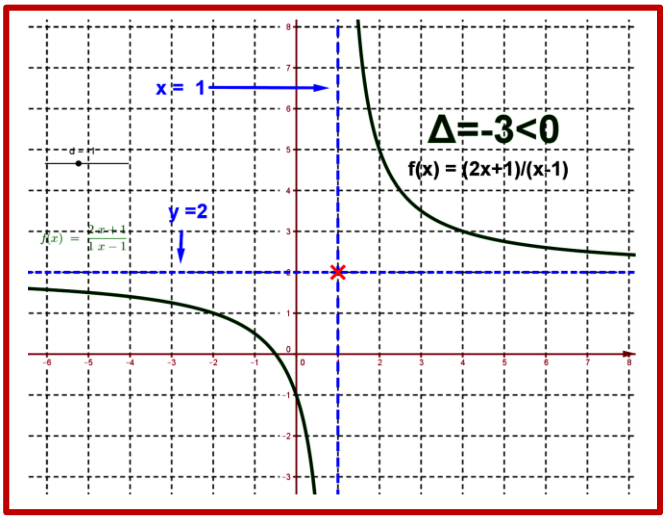
2. مثال: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$



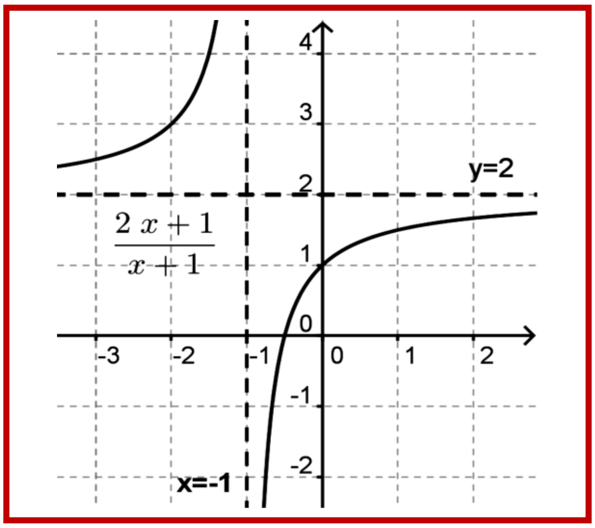
3. مفردات :

- المنحنى المحصل عليه يسمى: هذلول hyperbole
- مركزه: النقطة $\Omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ sommet
- مقاربه العمودي: هو المستقيم المعرف ب: $D_h : y=\frac{a}{c}$. Asymptote vertical
- مقاربه الأفقي: هو المستقيم المعرف ب: $D_v : x=-\frac{d}{c}$. Asymptote horizontal

4. مثال 1: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$



مثال 2 : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$



D. دراسة الدالة العددية: $f(x)=\sqrt{x+a}$

1. حالة : $f(x)=\sqrt{x+a}$

❖ f معرفة على $D_f=[-a;+\infty[$.

❖ تغيرات f :

ليكن x و x' من D_f حيث $-a\le x<x'$

$x<x' \Rightarrow 0\le x+a<x'+a$

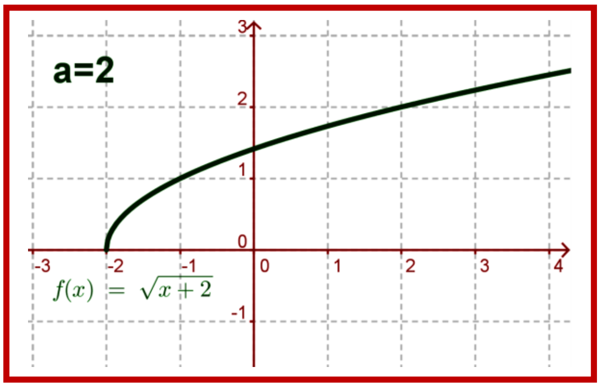
$\Rightarrow 0\le\sqrt{x+a}<\sqrt{x'+a}$

$\Rightarrow 0\le f(x)<f(x')$

و منه f تزايدية قطعا على $D_f=[-a;+\infty[$.

جدول تغيرات f على $D_f=[-a;+\infty[$

x	$-a$	$+\infty$
f(x)	0	↗



2. حالة: $f(x)=\sqrt{a-x}$

❖ f معرفة على $D_f=]-\infty,a]$.

❖ تغيرات f :

ليكن x و x' من D_f حيث $x<x'\le a$

$x<x'\le a \Rightarrow -a\le -x<-x'$

$\Rightarrow 0\le -x+a<-x'+a$

$\Rightarrow 0\le\sqrt{x+a}<\sqrt{x'+a}$

$\Rightarrow 0\le f(x)<f(x')$

و منه f تناقصية قطعا على $D_f=]-\infty,a]$.

جدول تغيرات f على $D_f=]-\infty,a]$

x	$-\infty$	a
f(x)	↘	0