



I. عموميات:

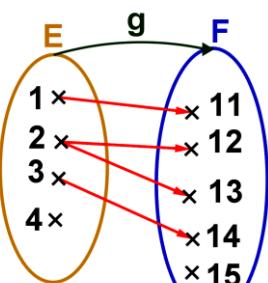
A. تطبيق:

1. نشاط:

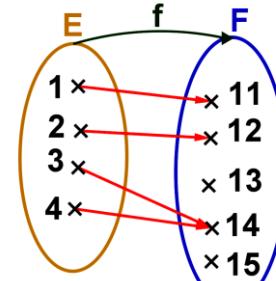
نعتبر المجموعتين: $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{11, 12, 13, 14, 15\}$

نعتبر العلاقة f (أو g) التي تربط عناصر المجموعة E بعناصر المجموعة F كما يلي:

ب - حالة 2: g ليست بتطبيق:



ليس بتطبيق من E نحو g



تطبيق من E نحو f

1. ماذا تلاحظ؟

2. مفردات:

- العلاقة f تسمى تطبيق من E إلى F ونرمز له بـ f أو g أو h
المجموعة E تسمى مجموعة الاتraction. المجموعة F تسمى مجموعة الوصول.
- عنصر x من E يرمز له بـ x و يسمى سابق. عنصر من F يرمز له بـ y و يسمى صورة.

التطبيق f يربط x ب y لهذا نكتب: $f(x) = y$

نخص ما سبق بـ:

$f : E \rightarrow F$

$x \mapsto f(x) = y$

3. تعريف:

كل علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر وحيد y من F تسمى تطبيقا من E إلى F (نحو F).

و نكتب:

$f : E \rightarrow F$

$x \mapsto f(x) = y$

4. ملحوظة:

كل دالة عدبية هي تطبيق من مجموعة تعريفها نحو \mathbb{R} .

كل تطبيق $f : E \rightarrow F$ هو دالة من E نحو F .

إذا كان $F = E$ نقول أن f تطبيق في E .

$$\left. \begin{array}{l} E = E' \wedge F = F' \\ \forall x \in E : f(x) = g(x) \end{array} \right\}$$

تطبيقين متساوين إذ وفقط إذا كان: $g : E' \rightarrow F'$ و $f : E \rightarrow F$

$x \mapsto g(x) = y$ و $x \mapsto f(x) = y$

و نكتب: $f = g$

5. تمارين:

تمرين 1: نعتبر التطبيق التالي.



درس : التطبيقات

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto f(n) = |n|$$

١. حدد صور ٠ و -٢ و ٣. ثم حدد سوابق ١ و ٠ و ٣.

٢. هل الاستلزم: $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$ صحيح؟

▪ تمرين ٢: نعتبر التطبيق التالي.

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n,m) \mapsto f((n,m)) = n \times m$$

٣. حدد صور (١,٠) و (-٣,٢) و (٦,١). ثم حدد سوابق ١ و ٦ و ٠.

٤. هل لكل (n,m) و (n',m') من \mathbb{N}^2 الاستلزم صحيح: $f((n,m)) = f((n',m')) \Rightarrow n = n'$ و $m = m'$ ؟

▪ مثال ٣:

هل التطبيقين التاليين متساوين؟

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2 - 1$$

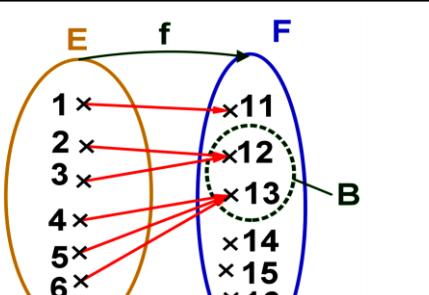
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$$

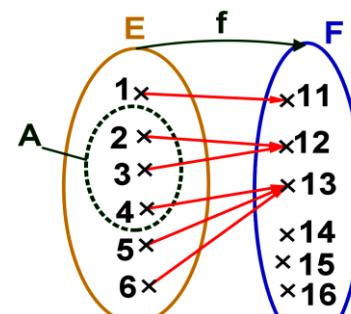
▪ بـ. الصورة المباشرة لجزء A من مجموعة الاتraction:

▪ نشاط: نعتبر التطبيق التالي.

١. حدد المجموعة B حيث عناصرها هي صور لعناصر A.



ما هي المجموعة C المكونة
من سوابق عناصر الجزء B؟



ما هي المجموعة B المكونة
من صور عناصر الجزء A؟

▪ مفردات:

المجموعة: $B = \{12, 13\}$ تسمى الصورة المباشرة للجزء A من مجموعة الاتraction E و نرمز لها بـ $B = f(A)$.

و نكتب: $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.

المجموعة: $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ تسمى الصورة العكسية للجزء B من مجموعة الوصول F و نرمز لها بـ $C = f^{-1}(B)$.

و نكتب: $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

▪ تعاريف:

▪ تعریف ١:

f تطبيق من E إلى F . جزء من E (أي $A \subset E$) صور عناصر A تكون مجموعة B (و هي جزء من F) تسمى الصورة المباشرة للجزء A . ويرمز لها: $B = f(A)$

و منه: $f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset F$

$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$ إذن:



f تطبيق من E إلى F . B جزء من F (أي $B \subset F$).
سوابق عناصر B تكون مجموعة C (وهي جزء من E) تسمى الصورة العكسية للجزء B . ويرمز لها: $C = f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E$
و منه: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$ إذن:

٤. تمارين:

تمرين ١:

نعتبر التطبيق التالي:

- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- $$X = (a, b) \mapsto f(X) = f((a, b)) = a$$
١. حدد $f((2, 7))$ و $f((2, 1))$.
٢. أكتب بالإدراك $f^{-1}(\{2\})$ (أي مجموعة سوابق ٢)
٣. هل الاستلزم التالي صحيح؟ $\forall n, n' \in \mathbb{N} : f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$.
- $f((a, b)) = f((a', b')) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$
و ذلك لكل (a, b) و (a', b') من \mathbb{N}^2 .

٥. خصائص:

- A و B جزء من مجموعة E . f تطبيق من E إلى F . C و D جزء من مجموعة F .
 $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.١
 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.٢
 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.٣
 $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.٤
 $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.٥
 $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.٦

٦. برهان:

١. نبين أن: $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

لدينا: $f(A) \subset f(B)$ و نبين $A \subset B$

ليكن $y_A = f(x_A)$ إذن: يوجد x_A من A حيث:

و منه: $y_A \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_A \in A / y_A = f(x_A)$ (١)

إذن: $(A \subset B) \Rightarrow \exists x_A \in B / y_A = f(x_A)$

و بالتالي: $f(x_A) \in f(B)$

خلاصة: $f(A) \subset f(B)$

٢. نبين أن:



$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{أ-}$$

$$\therefore f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad \text{•}$$

ليكن: y من $f(A \cup B)$ إذن يوجد $x \in A \cup B$ حيث

و منه: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ أو $x \in B$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ أو } f(x) \in f(B)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$$

$$\therefore f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad \text{خلاصة ١:}$$

$$\therefore f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad \text{•}$$

لدينا: $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$

$$\therefore B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$$

و منه: $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

$$\therefore f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad \text{خلاصة ٢:}$$

$$\therefore f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{خلاصة:}$$

$$\therefore f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{ب-}$$

ليكن: y من $f(A \cap B)$ إذن يوجد $x \in A \cap B$ حيث

و منه: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ و $x \in B$

$$\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ و } f(x) \in f(B)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$$

$$\therefore f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{خلاصة ١:}$$

$$\therefore C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \quad \text{٣-}$$

ليكن x من $f^{-1}(C)$

$$x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$$

$$\Rightarrow f(x) \in D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$$

و منه: $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

٤- نبين أن:

$$\therefore f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad \text{أ-}$$

$$\therefore f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad \text{•}$$

$$\therefore f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \text{إذن:} \quad \begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \\ A \cap B \subset B \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B) \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\therefore f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D) \quad \text{•}$$

ليكن x من $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ و } x \in f^{-1}(D)$$



$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ و } f(x) \in D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$$

. ومنه : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$

خلاصة : $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ب - نبين : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

نبين : $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

. $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$ إذن : $\begin{cases} A \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B) \end{cases}$ لدينا :

نبين : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

. $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ليكن x من

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ أو } f(x) \in D$$

$f(x) \in C$: حالة ١

إذن : $x \in f^{-1}(C)$ و نعلم أن :

$f(x) \in C$: حالة ٢

. $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ إذن : $x \in f^{-1}(C)$ و نعلم أن :

في كلتا الحالتين : $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

و منه : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

خلاصة : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ملحوظة : يمكن الاستدلال بالكافوزات المتالية (

C. قصور دالة - تمديد دالة:

1. نشاط:

نعتبر التطبيقات التاليين:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -4x \quad x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

I. ما هي العلاقات التي تربط التطبيق g بالتطبيق f ؟

جواب:

العلاقات هي:

$$\cdot [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$$

$$\cdot \forall x \in [0, +\infty[, g(x) = f(x)$$

2. مفردات:

التطبيق g يكتفي أو يقتصر على إعطاء صور x من $[0, +\infty[$. ولهذا التطبيق g يسمى قصور التطبيق f على $[0, +\infty[$. كل تطبيق h يواصل على إعطاء صور x من B حيث $A \subset B$ يسمى تمديدا للتطبيق f على B .



٣. تعريف ١: (قصور)

f تطبيق من E نحو F .

كل تطبيق g حيث :

١- مجموعة انطلاقه هي A حيث $A \subset E$.

$\forall x \in A : g(x) = f(x)$ ٢-

g يسمى قصور للتطبيق f على A .

إذن:

$$g : A \ (A \subset E) \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

٤. تعريف ٢ : (تمديد)

f تطبيق مجموعة انطلاقه E . كل تطبيق h مجموعة انطلاقه B و يحقق ما يلي :

$E \subset B$ ١-

$\forall x \in E, h(x) = f(x)$ ٢-

h يسمى تمديد للتطبيق f على B .

$$\begin{cases} x \in E, h(x) = f(x) \\ x \in B \setminus E, h(x) = g(x) \end{cases}$$

إذن:

٥. ملحوظة: تمديد ليس بواحد.

٦. تمرين:

تمرين ١:

نعتبر التطبيقات التاليين:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -4x \quad x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

١. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على \mathbb{R} حيث?

٢. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على \mathbb{R} حيث?

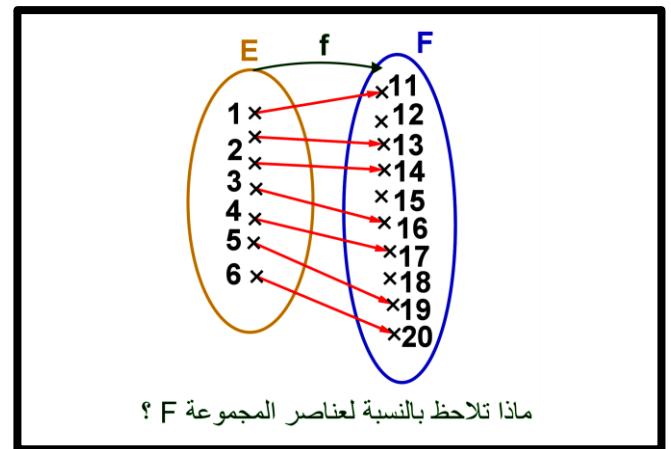
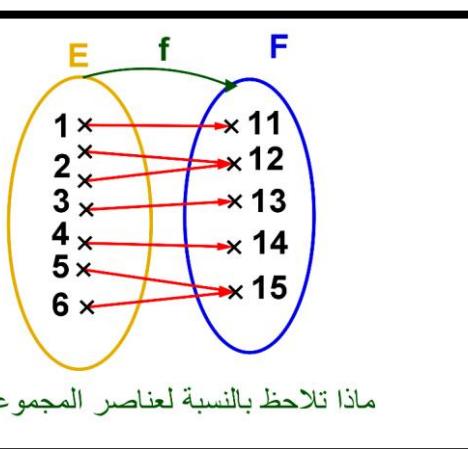
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = -2x^4 + 2x^3 |x+1|$$

٢. التطبيق التباعي - الشمولي - التطبيق التقابل - التقابل العكسي:

A. التطبيق التباعي:

١. نشاط: نعتبر التطبيقات التاليين.





٢. تعريف:

f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق تباعي (أو تباعي) إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقاً واحد على الأكثر من E .
أو أيضاً: $(\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ تباعي.

٣. تمارين:

نعتبر التطبيق التالي: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
هل التطبيق f تباعي؟ $(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, 0)$

B. التطبيق الشمولي:

١. تعريف:

f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق شمولي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقاً واحداً على الأقل من E .
أو أيضاً: $(\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x))$ شمولي

٢. ملحوظة:

- كي نبرهن على أن f شمولي نبين أن المعادلة $y = f(x)$ لها على الأقل حل في E مهما يكن y من F (المجهول هو x أما y من F).
- $f(E) = F$ شمولي

٣. تمارين:

تمرين ١: نعتبر التطبيق التالي: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 - 2x$

تمرين ٢: نعتبر التطبيق التالي: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, 0)$

١. هل التطبيق f شمولي؟

٢. هل g قصور التطبيق f على $[0, +\infty)$ شمولي؟

حيث:

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = 3x|x+1| - 3x^2$$

C. التطبيق التقابلـي – التطبيق العكسي:

١. تعريف:

- f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق تقابلـي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقاً واحداً x من E .
- f تقابلـي. $(\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x))$
- التطبيق g من F إلى E الذي يربط كل عنصر y من F بالعنصر الوحيد x من E حيث $y = f(x)$ يسمى التطبيق العكسي لـ f ؛
و يرمز له بـ $g = f^{-1}$.



2. ملحوظة:

- التطبيق العكسي f^{-1} يكتب على الشكل التالي:

$$f^{-1} : F \rightarrow E \quad f^{-1} : F \rightarrow E$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) \quad y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

$$\left. \begin{array}{l} x = f(x) \\ x \in E \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{array} \right\}$$

$$\text{العلاقة التي تربط } f \text{ و } f^{-1} \text{ هي:}$$
- لكي نبرهن على أن f تقابلية نبين أن المعادلة $x \in E : f(x) = y$ لها على حل وحيد مهما يكن y من F .

3. تمارين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيق التالي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x - 2$$

تمرين 2:

نعتبر التطبيق التالي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$$

تمرين 3:

نعتبر التطبيق التالي:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

تمرين 4:

هل التطبيق f تقابلية؟

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

تمرين 5:

حدد تقابلية العكسي f^{-1} .

تمرين 6:

مركب التطبيقات:

تمرين 7:

تعريف:

و g تطبيقات حيث: $g : F \rightarrow G$ و $f : E \rightarrow F$ و $h : E \rightarrow G$ المعرف ب: $h(x) = g(f(x))$ لكل x من E و يسمى مركب التطبيقات f و g في هذا الترتيب.
يرمز له ب: $g \circ f$. إذن:

$$h = g \circ f : E \rightarrow G$$

$$x \mapsto h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

2. ملحوظة:

مركب تطبيقات ليس بمتبادلي دائمًا.

مركب التطبيقات هو تجمعي:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$$

f تقابلية و تقابلية العكسي هو f^{-1}

لدينا:

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x$$

توضيح للملاحظة الأخيرة:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x \mapsto & f(x) = y & \mapsto & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x & \\ & & & \underbrace{\phantom{f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x}}_{f^{-1} \circ f} & \end{array}$$

لدينا:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ y \mapsto & f^{-1}(y) = x & \mapsto & f(x) = f(f^{-1}(y)) = y & \\ & & & \underbrace{\phantom{f(x) = f(f^{-1}(y)) = y}}_{f \circ f^{-1}} & \end{array}$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{إذن:}$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{إذن:}$$



حدد: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ و $f(x) = 4x^3 - 2x$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث: $f \circ g$ ثم $g \circ f$

▪ تمارين: ٣
▪ تمرين ١:

▪ تمرين ٢:

$$f : [\sqrt{2}, +\infty[\rightarrow [\sqrt{2}, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$$

1. بين أن: f تقابل في $[\sqrt{2}, +\infty[$.
2. أحسب: f^2 ثم استنتج الدالة العكسية f^{-1} .