



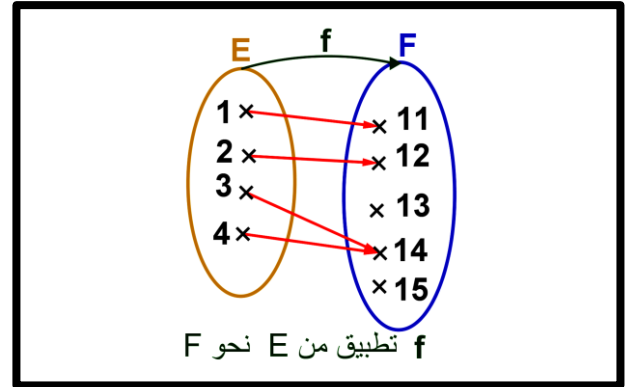
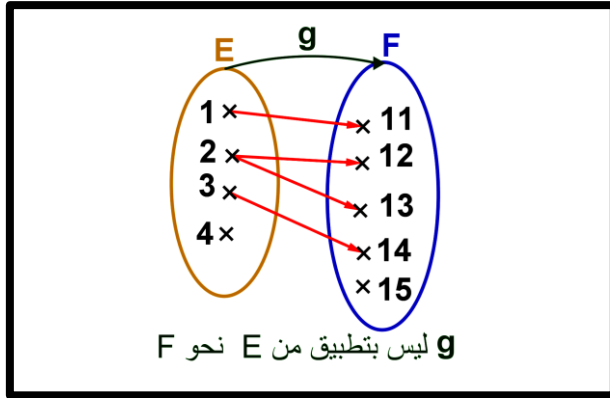
أ. عموميات:

أ. تطبيق:

1. نشاط:

نعتبر المجموعتين: $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{11, 12, 13, 14, 15\}$
نعتبر العلاقة f (أو g) التي تربط عناصر المجموعة E بعناصر المجموعة F كما يلي:
أ - حالة 1: f تطبيق:

ب - حالة 2: g ليست بتطبيق:



1. ماذا تلاحظ ؟

2. مفردات:

- العلاقة f تسمى تطبيق من E إلى F ونرمز له ب: f أو g أو h
- المجموعة E تسمى مجموعة الانطلاق. المجموعة F تسمى مجموعة الوصول.
- عنصر x من E يرمز له ب: x ويسمى سابق. عنصر من F يرمز له ب: y ويسمى صورة.
- التطبيق f يربط x ب y لهذا نكتب: $f(x) = y$.
- نلخص ما سبق ب:

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

3. تعريف:

E و F مجموعتان غير فارغتين.
كل علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر وحيد y من F تسمى تطبيقا من E إلى F (نحو F).
و نكتب :

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

4. ملحوظة:

- كل دالة عددية هي تطبيق من مجموعة تعريفها نحو \mathbb{R} .
- كل تطبيق $f : E \rightarrow F$ هو دالة من E نحو F .
- إذا كان $F = E$ نقول أن f تطبيق في E .
- تطبيقين متساويين إذ وفقط إذا كان: $E = E' \wedge F = F'$ و $\forall x \in E : f(x) = g(x)$

$$\left. \begin{array}{l} g : E' \rightarrow F' \\ x \mapsto g(x) = y \end{array} \right\} \text{ و } \left. \begin{array}{l} f : E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) = y \end{array} \right\} \text{ و نكتب: } f = g$$

5. تمرين:

تمرين 1: نعتبر التطبيق التالي.



$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto f(n) = |n|$$

1. حدد صور 0 و -2 و 3. ثم حدد سوابق 1 و 0 و 3.

2. هل الاستلزام: $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$ صحيح؟

■ تمرين 2: نعتبر التطبيق التالي.

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto f((n, m)) = n \times m$$

3. حدد صور (1, 0) و (2, -3) و (-6, 1). ثم حدد سوابق 1 و 6 و 0.

4. هل لكل (n, m) و (n', m') من \mathbb{N}^2 الاستلزام صحيح: $m = m'$ و $n = n' \Rightarrow f((n, m)) = f((n', m'))$ ؟

■ مثال 3:

هل التطبيقين التاليين متساويين ؟

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x^2 - 1$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

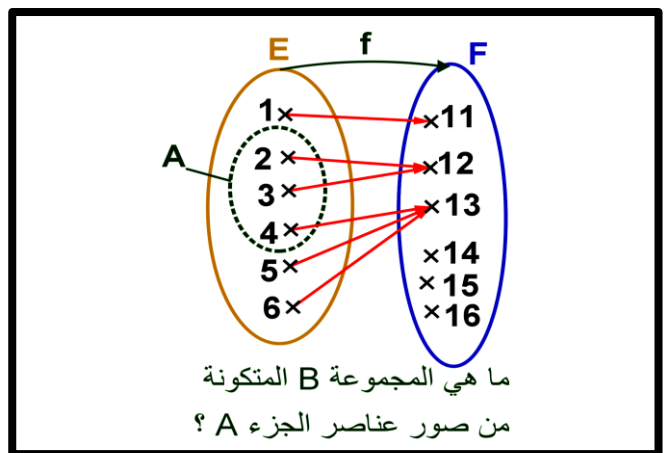
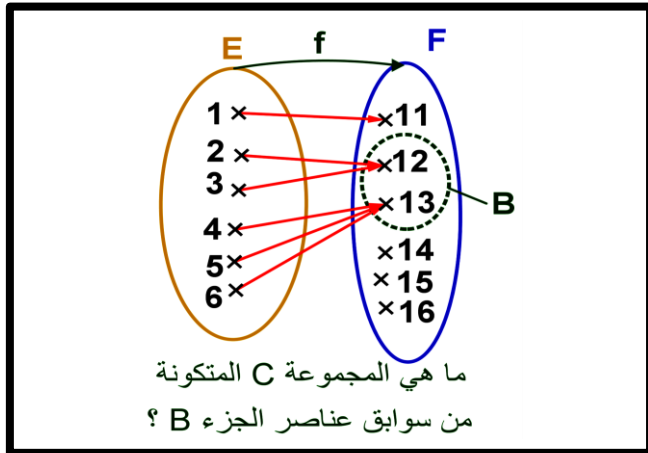
$$x \mapsto f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$$

B. الصورة المباشرة لجزء A من مجموعة الانطلاق:

1. نشاط: نعتبر التطبيق التالي.

1. حدد المجموعة B حيث عناصرها هي صور لعناصر A.

2. حدد المجموعة C حيث عناصرها هي سوابق لعناصر B.



2. مفردات:

المجموعة: $B = \{12, 13\}$ تسمى الصورة المباشرة للجزء A من مجموعة الانطلاق E ونرمز لها بـ $B = f(A)$.

و نكتب: $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.

المجموعة: $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ تسمى الصورة العكسية للجزء B من مجموعة الوصول F ونرمز لها بـ $C = f^{-1}(B)$.

و نكتب: $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

3. تعاريف:

■ تعريف 1:

f تطبيق من E إلى F. A جزء من E (أي $A \subset E$)

صور عناصر A تكون مجموعة B (و هي جزء من F) تسمى الصورة المباشرة للجزء A. ويرمز لها: $B = f(A)$

و منه: $f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset F$

إذن: $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$



تعريف 2:

f تطبيق من E إلى F . B جزء من F (أي $B \subset F$).
سوابق عناصر B تكون مجموعة C (وهي جزء من E) تسمى الصورة العكسية للجزء B . ويرمز لها: $C = f^{-1}(B)$
ومنه: $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E$
إن: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

4. تمارين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيق التالي:

تمرين 2:

نعتبر التطبيق التالي:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$X = (a, b) \mapsto f(X) = f((a, b)) = a$$

1. حدد $f((2, 7))$ و $f((2, 1))$.

2. أكتب بالإدراك $f^{-1}(\{2\})$ (أي مجموعة سوابق 2)

3. هل الاستلزام التالي صحيح؟

$$f((a, b)) = f((a', b')) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$$

و ذلك لكل (a, b) و (a', b') من \mathbb{N}^2 .

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto f(n) = 2n$$

1. حدد $f^{-1}(\{4, 6, 12\})$ و $f(\{0, 1, 2, 5\})$.

2. حدد $f(\mathbb{N})$ و $f^{-1}(\{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}) = f^{-1}(2\mathbb{N})$.

3. هل الاستلزام التالي صحيح؟ $\forall n, n' \in \mathbb{N} : f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$

5. خاصيات:

A و B جزآن من مجموعة E . C و D جزآن من مجموعة F . f تطبيق من E إلى F .

$$1. A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$2. f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{أ -}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{ب -}$$

$$3. C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$$

$$4. f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad \text{أ -}$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad \text{ب -}$$

6. برهان:

$$1. \text{ نبين أن : } A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

لدينا : $A \subset B$ و نبين $f(A) \subset f(B)$.

ليكن $y_A \in f(A)$ إذن : يوجد x_A من A حيث : $y_A = f(x_A)$

ومنه : $y_A \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_A \in A / y_A = f(x_A)$ (1)

إذن : $\exists x_A \in B / y_A = f(x_A)$ (لأن $A \subset B$) (1) \Rightarrow

و بالتالي : $f(x_A) \in f(B)$.

خلاصة : $f(A) \subset f(B)$.

2. نبين أن :



أ- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

• نبين أن : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

ليكن y من $f(A \cup B)$ إذن يوجد $x \in A \cup B$ حيث $y = f(x)$

ومنه : $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ أو $x \in B$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$ أو $f(x) \in f(B)$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

خلاصة 1 : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

• نبين أن : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

لدينا : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$ حسب الخاصية 1

$B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$

ومنه : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

خلاصة 2 : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

خلاصة : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ب- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

ليكن y من $f(A \cap B)$ إذن يوجد $x \in A \cap B$ حيث $y = f(x)$

ومنه : $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ و $x \in B$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$ و $f(x) \in f(B)$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

خلاصة 1 : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

3. نبين أن : $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

ليكن x من $f^{-1}(C)$

$x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$

$\Rightarrow f(x) \in D$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$

ومنه : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

4. نبين أن :

أ- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

• نبين : $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

لدينا : $\begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \\ A \cap B \subset B \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B) \end{cases}$ إذن : $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

• نبين : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$

ليكن x من $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ و $x \in f^{-1}(D)$



$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ و } f(x) \in D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$$

$$\text{ومنه : } f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$$

$$\text{خلاصة : } f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$\text{ب - نبين : } f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\bullet \text{ نبين : } f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} A \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B) \end{cases} \text{ إذن : } f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$$

$$\bullet \text{ نبين : } f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\text{ليكن } x \text{ من } f^{-1}(C \cup D)$$

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$$

$$\Rightarrow f(x) \in C \text{ أو } f(x) \in D$$

$$\text{حالة 1 : } f(x) \in C$$

$$\text{إذن : } x \in f^{-1}(C) \text{ ونعلم أن : } f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\text{حالة 2 : } f(x) \in D$$

$$\text{إذن : } x \in f^{-1}(D) \text{ ونعلم أن : } f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\text{في كلتا الحالتين : } x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\text{ومنه : } f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\text{خلاصة : } f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \text{ (ملحوظة : يمكن الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)}$$

$$\underline{C} \text{ قصور دالة - تمديد دالة:}$$

1. نشاط:

نعتبر التطبيقين التاليين:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -4x \quad \text{و} \quad x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

1. ما هي العلاقات التي تربط التطبيق g بالتطبيق f ؟

جواب:

العلاقات هي:

$$\bullet [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$$

$$\bullet \forall x \in [0, +\infty[, g(x) = f(x) \text{ و}$$

2. مفردات:

التطبيق g يكتفي أو يقتصر على إعطاء صور x من $[0, +\infty[$. ولهذا التطبيق g يسمى قصور التطبيق f على $[0, +\infty[$.

كل تطبيق h يواصل على إعطاء صور x من B حيث $A \subset B$ يسمى تمديدا للتطبيق f على B.



3. تعريف 1: (قصور)

f تطبيق من E نحو F.

كل تطبيق g حيث :

1- مجموعة انطلاقه هي A حيث $A \subset E$.

2- $\forall x \in A : g(x) = f(x)$

g يسمى قصور للتطبيق f على A.

إذن:

$$g : A (A \subset E) \rightarrow F$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

4. تعريف 2: (تمديد)

f تطبيق مجموعة انطلاقه E. كل تطبيق h مجموعة انطلاقه B و يحقق ما يلي :

1- $E \subset B$

2- $\forall x \in E, h(x) = f(x)$

h يسم تمديد للتطبيق f على B.

$$\begin{cases} x \in E, h(x) = f(x) \\ x \in B \setminus E, h(x) = h(x) \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

5. ملحوظة: تمديد ليس بوحيد.

6. تمرين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيقين التاليين:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -4x \quad \text{و} \quad x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

1. هل التطبيق g قصور للتطبيق f على $[0, +\infty[$ ؟

تمرين 2:

نعتبر التطبيق التالي.

$$f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x^3$$

1. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على \mathbb{R} حيث؟

2. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على \mathbb{R} حيث؟

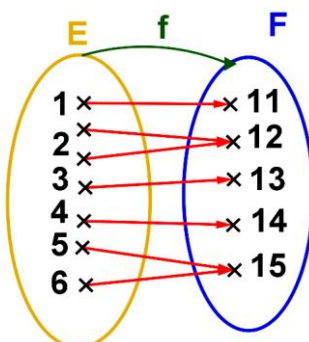
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = -2x^4 + 2x^3 |x+1|$$

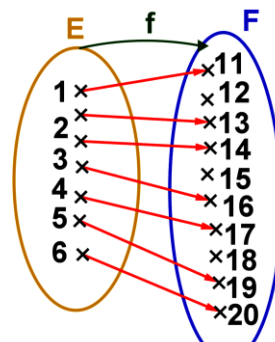
II. التطبيق التبادلي - الشمولي - التطبيق التبادلي - التقابل العكسي:

A. التطبيق التبادلي:

1. نشاط: نعتبر التطبيقين التاليين.



ماذا تلاحظ بالنسبة لعناصر المجموعة F ؟



ماذا تلاحظ بالنسبة لعناصر المجموعة F ؟



2. تعريف:

f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق تبايني (أو تباين) إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقا واحد على الأكثر من E .
أو أيضا : f تبايني $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

3. تمرين :

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
هل التطبيق f تبايني ؟
نعتبر التطبيق التالي : $(x, y) \mapsto f((x, y)) = (x, 0)$

B. التطبيق الشمولي:

1. تعريف:

f تطبيق من E نحو F .
 f يسمى تطبيق شمولي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقا واحدا على الأقل من E .
أو أيضا : f شمولي $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x))$

2. ملحوظة:

- كي نبرهن على أن f شمولي نبين أن المعادلة $x \in E : f(x) = y$ لها على الأقل حل في E مهما يكن y من F (المجهول هو x أما y من F).
- $f(E) = F \Leftrightarrow f$ شمولي

3. تمارين :

تمرين 1 :

نعتبر التطبيق التالي :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3|x|$$

1. هل التطبيق f شمولي؟

2. هل g قصور التطبيق f على $[0, +\infty[$ شمولي؟

حيث:

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = 3x|x+1| - 3x^2$$

C. التطبيق التقابلي - التطبيق العكسي:

1. تعريف:

- f تطبيق من E نحو F .
- f يسمى تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقا وحيدا x من E .
 f تقابلي $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x))$
- التطبيق g من F إلى E الذي يربط كل عنصر y من F بالعنصر الوحيد x من E حيث $f(x) = y$ يسمى التطبيق العكسي لـ f ؛
و يرمز له بـ : $g = f^{-1}$.



2. ملحوظة:

- التطبيق العكسي f^{-1} يكتب على الشكل التالي :
 $f^{-1} : F \rightarrow E$ أو أيضا : $f^{-1} : F \rightarrow E$
 $x \mapsto f^{-1}(x)$ و ذلك باستعمال المتغير x بدل من y $y \mapsto f^{-1}(y) = x$
- العلاقة التي تربط f و f^{-1} هي : $\left\{ \begin{array}{l} x = f(x) \\ x \in E \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{array} \right.$
- لكي نبرهن على أن f تقابلي نبين أن المعادلة $x \in E : f(x) = y$ لها على حل وحيد مهما يكن y من F .

3. تمارين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيق التالي :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x - 2$$

1. هل التطبيق f تقابلي؟

2. حدد تقابله العكسي f^{-1} .

III. مركب التطبيقات:

1. تعريف:

f و g تطبيقان حيث : $f : E \rightarrow F$ و $g : F \rightarrow G$

التطبيق $h : E \rightarrow G$ المعرفة بـ : $h(x) = g(f(x))$ لكل x من E و يسمى مركب التطبيقين f و g في هذا الترتيب.

يرمز له بـ : $g \circ f$. إذن :

$$h = g \circ f : E \rightarrow G$$

$$x \mapsto h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

2. ملحوظة:

- مركب تطبيقان ليس بتبادلي دائما.
- مركب التطبيقات هو تجمعي: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$
- f تقابل و تقابله العكسي هو f^{-1} لدينا:

$$f \circ f^{-1} = Id_F \text{ أي } \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x \text{ -1}$$

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ أي } \forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x \text{ -2}$$

توضيح للملاحظة الأخيرة:

$$\text{إذن: } \forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x \text{ أي } f^{-1} \circ f = Id_E$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ x \mapsto & f(x) = y & \mapsto f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \end{array}$$

لدينا:

$$\text{إذن: } \forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x \text{ أي } f \circ f^{-1} = Id_F$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ y \mapsto & f^{-1}(y) = x & \mapsto f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}$$



3. تمارين :

■ تمرين 1:

حدد : $g \circ f$ ثم $f \circ g$ حيث : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $f(x) = 4x^3 - 2x$ و $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

■ تمرين 2:

$$f: [\sqrt{2}, +\infty[\rightarrow [\sqrt{2}, +\infty[$$

لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $x \mapsto f(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$

1. بين أن : f تقابل في $[\sqrt{2}, +\infty[$.

2. أحسب: f^2 ثم استنتج الدالة العكسية f^{-1} .