

المجموعات و التطبيقات

المجموعات

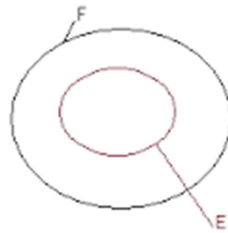
- المجموعة هي تجمع لأشياء أو عناصر مادية أو غير مادية ، واقعية أو خيالية .
يمكن وصف مجموعة بذكر جميع عناصرها (مجموعة معرفة بتفصيل) أو بذكر صفة أو علاقة بين عناصرها (مجموعة معرفة بإدراك) .

$$\text{مثال : } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \{ \text{أحمر ، أسود} \} \quad \{0, 1\} \quad \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| \leq 7\}$$

- قد تكون مجموعة خالية من العناصر و تسمى مجموعة فارغة و نرمز لها ب : $\emptyset$
- نرمز ب $x \in E$ إذا كان x عنصر ينتمي للمجموعة E و نرمز ب $x \notin E$ في حالة العكس .
في

التضمن

نقول أن E ضمن F و نكتب $E \subset F$ إذا كان كل عنصر من E هو أيضا عنصر من F أو بتعبير رياضي :
 $(\forall x \in E) : x \in F$ و نقول كذلك أن E جزء من F



- لكل مجموعة E لدينا : $\emptyset \subset E$ و $E \subset E$
- لتكن A و B و C ثلاث مجموعات ، لدينا : $(A \subset B \text{ و } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

التساوي

$$E = F \text{ تكافئ } E \subset F \text{ و } F \subset E \text{ تكافئ } x \in E \Leftrightarrow x \in F$$

مجموعة أجزاء E

نرمز لها ب : $\mathcal{P}(E)$ و هي المجموعة المكونة من جميع أجزاء E
مثال : $E = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

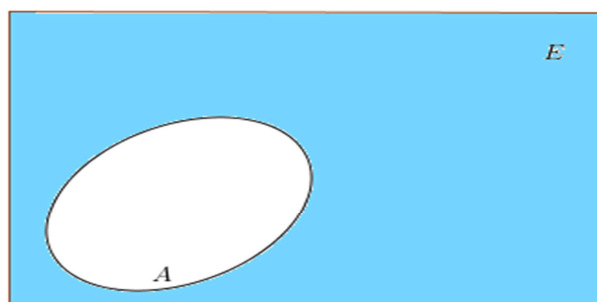
لتكن E مجموعة

- $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$
- $E \in \mathcal{P}(E)$ و $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$

متممة مجموعة

إذا كان $A \subset E$

مجموعة عناصر E التي لا تنتمي لـ A تسمى متممة A في E : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$
و نرمز لها كذلك بـ : $\overline{A}$ أو $E \setminus A$



- $\overline{\overline{A}} = A$

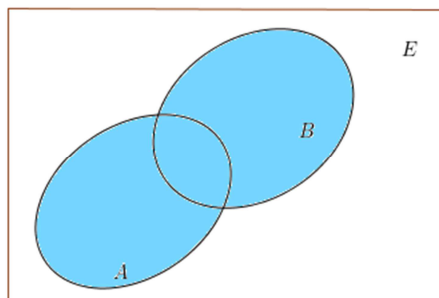
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

- $C_E^\emptyset = E$ و $C_E^E = \emptyset$

الإتحاد

لتكن A و B مجموعتين ضمن E

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$$



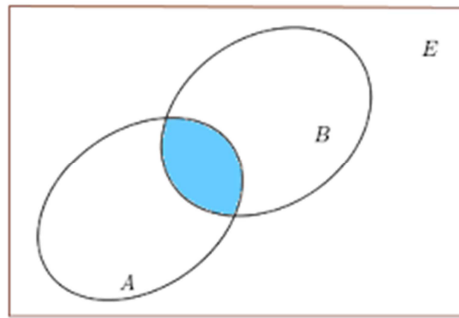
لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من المجموعة E

- $B \subset A \cup B$ و $A \subset A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$ و $A \cup \emptyset = A$ و $A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

التقاطع

لتكن A و B مجموعتين ضمن E

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in B\}$$

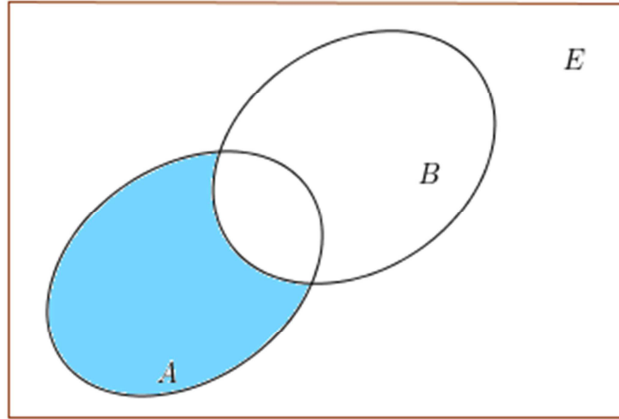


لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من المجموعة E

- $A \cap B \subset B$ و $A \cap B \subset A$
- $A \cap B \subset A \cup B$
- $A \cap B = B \cap A$ و $A \cap \emptyset = \emptyset$ و $A \cap A = A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

فرق مجموعتين

لتكن A و B جزأين من المجموعة E
فرق المجموعتين A و B في هذا الترتيب هو مجموعة العناصر من E التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B و نرمز له ب :
 $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \notin B\}$ ولدينا :



- $A \setminus B = A \cap C_E^B$
- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
- الفرق التماثلي : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

الجداء الديكارتي

لتكن E و F مجموعتين
الجداء الديكارتي ل E و F نرمز له ب : $E \times F$ و هو مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in E$ و $y \in F$
مثال :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$$

$$[1, 4] \times \mathbb{R} = \{(x, y) / 1 \leq x \leq 4 \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$$

التطبيقات

نسمي تطبيق $f : E \rightarrow F$ كل علاقة تربط عنصرا x من E بعنصر وحيد $y = f(x)$ من F

تساوي تطبيقين

ليكن $f : E \rightarrow F$ و $g : E \rightarrow F$ تطبيقين
 $(\forall x \in E) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$

التمثيل المباني للتطبيق $f : E \rightarrow F$

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F / x \in E\}$$

مركب تطبيقين

ليكن $f : E \rightarrow F$ و $g : F \rightarrow G$ إذن $g \circ f : E \rightarrow G$ هو التطبيق المعرف ب : $g \circ f(x) = g(f(x))$
$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

التطبيق المطابق

$$\begin{aligned} Id_E : E &\rightarrow E \\ x &\rightarrow x \end{aligned}$$

الصورة المباشرة – الصورة العكسية

لتكن $A \subset E$ وليكن التطبيق $f : E \rightarrow F$
الصورة المباشرة لـ A بالتطبيق f نرمز لها ب : $f(A)$ و هي معرفة بما يلي : $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A و B جزأين من المجموعة E ، لدينا :

- $f(A) \subset F$
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

لتكن $B \subset F$ ول
يكن التطبيق $f : E \rightarrow F$
الصورة العكسية ل B بالتطبيق f نرمز لها ب : $f^{-1}(B)$ وهي معرفة بما يلي : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A و B جزأين من المجموعة E ، لدينا :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &\subset E \\ A \subset B &\Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cap B) &\subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

تطبيق تبايني – تطبيق شمولي – تطبيق تقابلي

$$\begin{aligned} \text{لتكن } E \text{ و } F \text{ مجموعتين وليكن التطبيق } f : E \rightarrow F \\ f \text{ تبايني } \Leftrightarrow (\forall (a,b) \in E^2) [f(a)=f(b) \Rightarrow a=b] \\ f \text{ شمولي } \Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E) : y = f(x) \\ f \text{ تقابل } \Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists ! x \in E) : y = f(x) \end{aligned}$$

($f(E) = F$)
(f تبايني و شمولي)

إذا كان f تقابل فإنه و تقابله العكسي f^{-1} يحققان :
 $f^{-1} \circ f = Id_E$ و $f \circ f^{-1} = Id_F$

ليكن $f : E \rightarrow F$ و $g : F \rightarrow G$ تطبيقين تقابليين
التطبيق $g \circ f$ تقابل ولدينا : $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$